

---

# Afhankelijkheid van parameters in grondwatermodellen

Kees Maas

---

*Het aantal vrijheidsgraden van een grondwatermodel (het aantal knoppen waaraan onafhankelijk gedraaid kan worden) is altijd kleiner dan het aantal fysische parameters dat als invoer nodig is. Voor gevoeligheidsanalyses en voor het afregelen van modellen is het handig om te weten hoe de parameters samenhangen. Er zijn verschillende mogelijkheden om daar achter te komen. In dit artikel wordt DIMENSIE-ANALYSE toegepast op een gestileerde versie van een model van de winplaats Immerloopark. Met name wordt er gekeken naar de gevoeligheid van de oppervlakte van verblijftijdzones.*

## 1. Aanleiding

Dit artikel is geschreven als onderdeel van het VEWIN-onderzoeksproject 'Onzekerheid intrekgebieden'. In dat kader bestudeerde Wim Athmer (Kiwa) aan de hand van een numeriek model van de waterwinplaats Immerloopark hoe de ligging van het berekende intrekgebied afhangt van de modelparameters. Hij realiseerde zich dat het niet zinvol zou zijn om lukraak elke parameter waar het model om vraagt in grootte te variëren. Het resultaat zou niet meer te analyseren zijn. Bovendien is de invloed van sommige parameters uitwisselbaar, waardoor dubbel werk gedaan zou worden. Een bekend voorbeeld van uitwisselbaarheid betreft de  $kD$ - en  $c$ -waarden, die vaak voorkomen in de cluster  $\lambda = \sqrt{kDc}$ . In problemen waarin alleen deze 'spreidingslengte' een rol speelt heeft het geen zin om  $kD$  en  $c$  afzonderlijk te variëren. Een minder bekend voorbeeld is de uitwisselbaarheid van neerslag en polderpeil: in regionale grondwatermodellen is een verandering van neerslag vaak exact te compenseren door het polderpeil wat aan te passen. Hydrologen die zich bezighouden met het afregelen (kalibreren) van een grondwatermodel kennen dit soort frustrerende verschijnselen maar al te goed: *er zijn altijd veel te veel knoppen om aan te draaien*.

De vraag die Wim mij stelde was: "bestaat er een methode om vooraf aan te geven of er zulke clusters van modelparameters bestaan?". Daarover gaat dit artikel. Ed Veling (TUD/RIVM) zette me op het spoor van de *dimensie-analyse*. Dimensie-analyse is een wat in onbruik geraakte methode uit het prae-computertijdperk. Het is een fascinerende techniek, die onverwacht veel inzicht oplevert in fysische samenhangen, zonder dat men diep hoeft in te gaan op wiskundige aspecten. Daardoor heeft hij een grote didactische waarde. Er bestaan ook andere methoden om de vraag van Wim te beantwoorden, maar ik beperk me in dit artikel tot deze techniek. In het eerste hoofdstuk leg ik de methode uit aan de hand van twee geohydrologische toepassingen die te maken hebben met grondwaterstanden. In het tweede hoofdstuk pas ik hem toe op intrekgebieden.

## 2. Inleiding

Veel boeken over dimensie-analyse beginnen met het bijzonder aansprekende voorbeeld van de slinger (figuur 1). Intuïtief verwachten we dat de slingertijd  $T$  afhangt van de lengte  $l$ , de massa  $m$  en de versnelling van de zwaartekracht  $g$ . Losjes opgeschreven:

$$T = f(l, m, g) \quad (1)$$

Als we meer willen weten zouden we een serie laboratorium-experimenten kunnen opzetten: touwen van verschillende lengten knippen, daaraan voorwerpen met verschillende massa's hangen, en met een chronometer nauwkeurig de slingertijden opnemen. Dat levert een berg data op, waaruit door inventief puzzelwerk wellicht een wetmatigheid voor de slingertijd  $T$  valt af te leiden. Wie een fysiek model achterhaald vindt kan een numeriek model bouwen en de modelparameters  $l$  en  $m$  numeriek variëren, om dezelfde berg data te genereren. Met zo'n model kan zelfs het gedrag van de slinger op andere planeten onderzocht worden, door  $g$  variabel te stellen. (Nog meer data.)

Maar misschien kan het ook handiger? We weten dat de uitdrukking links in (1) dimensie [T] moet bezitten. Die eis geldt dan natuurlijk ook voor de uitdrukking rechts. Rechts hebben we:  $l$  met dimensie [L],  $m$  met dimensie [M] en  $g$  met dimensie [LT<sup>-2</sup>]. Deze parameters mogen blijkbaar alleen voorkomen in clusters die samen dimensie [T] opleveren. In hun meest algemene vorm zien die clusters er zó uit:

$$l^\alpha m^\beta g^\gamma$$

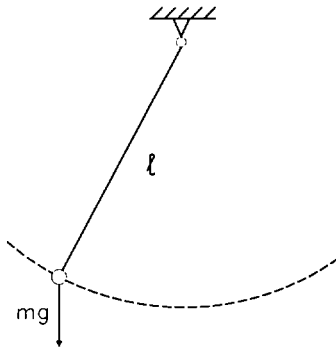
Zo'n cluster heeft dimensie [L<sup>α</sup>M<sup>β</sup>(LT<sup>-2</sup>)<sup>γ</sup>] = [L<sup>α+γ</sup>M<sup>β</sup>T<sup>-2γ</sup>]. Om op [T] uit te komen is er maar één combinatie van  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  mogelijk:

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{1}{2} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

Hiermee gaat (1) over in

$$T = f\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$$

Een uiterst interessante conclusie is dat de massa  $m$  van het voorwerp dat aan de slinger hangt geen invloed heeft op de slingertijd. Dat scheelt een hele reeks experimenten. Bovendien blijkt dat de lengte  $l$  en de versnelling van de zwaartekracht  $g$  alleen in de combinatie  $l/g$  voorkomen. Wie in de verleiding gekomen was om  $g$  apart te variëren, ziet dat zoiets overbodig is: zonder proeven te doen weten we al zeker dat een slinger op Mars dezelfde slingertijd heeft als een slinger op Aarde wanneer we de lengte vermenigvuldigen met  $g_{\text{Mars}}/g_{\text{Aarde}}$ .



Een dimensie-analyse vooraf kan dus een enorme besparing aan experimentele inspanning opleveren, en die conclusie geldt voor een numeriek model even goed als voor conventionele laboratoriummodellen, waarvoor de methode oorspronkelijk ontwikkeld is.

Figuur 1: Slinger

### 3. Dimensieloze parameters

Over het gedrag van de slinger valt zelfs nog meer te zeggen alvorens naar een model te grijpen. Maar eerst wil ik uitdrukking (1) in een verantwoorde vorm gieten. Wiskundig gezien deugt deze uitdrukking niet, want het argument van een wiskundige functie  $f(l, m, g)$  hoort dimensieloos te zijn. Een alternatieve vorm voor (1), die wel deugt, is

$$F(l, m, gT) = 0 \tag{2}$$

Om wiskundig verantwoord te werk te gaan moeten we dus zoeken naar dimensieloze parameter-clusters van de vorm

$$l^\alpha m^\beta g^\gamma T^\delta \tag{3}$$

Er is in de loop der tijd een gestructureerde aanpak gegroeid, die begint met het opstellen van een dimensiematrix (tabel 1). Ik denk dat deze tabel zelfverklarend is. Om de waarden

Tabel 1: Dimensie-matrix

	(L)	(T)	(M)
l	1	0	0
m	0	0	1
g	1	-2	0
T	0	1	0

van  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  en  $\delta$  te vinden die dimensieloze parameterclusters opleveren, vermenigvuldigen we de eerste rij van de matrix met  $\alpha$ , de tweede met  $\beta$ , enzovoort. Daarna tellen we de kolommen op. *De som van elke kolom moet nul zijn.* De eerste kolom levert

$$\alpha + \gamma = 0 \tag{4}$$

De tweede kolom levert

$$-2\gamma + \delta = 0 \tag{5}$$

en de derde kolom geeft

$$\beta = 0$$

Deze laatste vergelijking toont weer aan dat de massa  $m$  geen rol kan spelen:  $m^\beta$  valt weg uit de dimensieloze cluster (3). De resterende uitdrukkingen (4) en (5) vormen een stelsel van twee vergelijkingen met drie onbekenden. Dat is helaas een onbekende teveel. (Teveel onbekenden is typerend voor dimensie-analyse). We kunnen het stelsel dus niet volledig oplossen, maar we vinden wel dat

$$\alpha = -\gamma = -\frac{1}{2}\delta$$

Op grond daarvan is de dimensieloze cluster (3) te schrijven als

$$(l^{1/2}g^{-1/2}T)^{-\delta}$$

Hiermee gaat (2) over in

$$F\left\{(l^{1/2}g^{-1/2}T)^{-\delta}\right\} = 0$$

Maar dan bestaat er natuurlijk ook een functie

$$G\left\{l^{1/2}g^{-1/2}T\right\} = 0$$

Hieruit volgt

$$l^{1/2}g^{-1/2}T = c \quad \text{of} \quad T = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

waarin  $c$  een onbekende constante is. We hebben dus het probleem—nog zonder een model te gebruiken!—opgelost op één constante na. We kunnen volstaan met één enkel laboratoriumexperiment of één enkele modelrun om die constante te bepalen.

#### 4. De $\pi$ -stelling

Dimensieloze parameterclusters worden dimensieloze producten genoemd, aangeduid met  $\pi$ . Er bestaat een stelling, de  $\pi$ -stelling, die zegt dat een uitdrukking

$$f(a, b, c, \dots) = 0 \tag{6}$$

(waarin  $a, b, c, \dots$  modelparameters zijn zoals  $kD$ -waarde,  $c$ -waarde etc.) altijd omschreven kan worden in de vorm

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots) = 0 \quad (7)$$

waarin de  $\pi$ 's dimensieloze produkten zijn van de parameters  $a, b, c, \dots$ . Het belang van deze stelling voor ons is dat 7 altijd minder vrijheidsgraden (knoppen) bevat dan 6, hoewel beide uitdrukkingen precies hetzelfde betekenen. Het is dus altijd interessant om een probleem in dimensieloze vorm te gieten.

Hoeveel  $\pi$ 's zijn er? Om die vraag te beantwoorden gaan we even terug naar de vorige paragraaf, waar we al een dimensieloos produkt bepaald hebben. We begonnen met vier *dimensiedragende* parameters ( $l, m, g$  en  $T$ ) en we eindigden met één *dimensieloos* produkt ( $l^{-1/2}g^{1/2}T$ ). Om dat produkt te vinden stelden we een matrix op (tabel 1) met 3 kolommen (voor de drie dimensies [L], [T] en [M]) en 4 rijen (voor de vier parameters  $l, m, g$  en  $T$ ). Het aantal dimensieloze produkten dat we vonden was 4 (rijen) - 3 (kolommen) = 1 (oplossing). Meer algemeen levert een matrix van  $m$  rijen en  $n$  kolommen ( $m-n$ ) oplossingen op. Dit is een welbekend resultaat uit de algebra. *In het algemeen is het aantal  $\pi$ 's dus gelijk aan het aantal dimensiedragende parameters minus het aantal dimensies.* De algebra leert ons ook dat er uitzonderingen zijn, namelijk als de kolommen niet onafhankelijk zijn. Zijn, bijvoorbeeld, twee kolommen gelijk aan elkaar, dan neemt het aantal  $\pi$ 's met 1 toe.

## 5. Een geohydrologisch voorbeeld

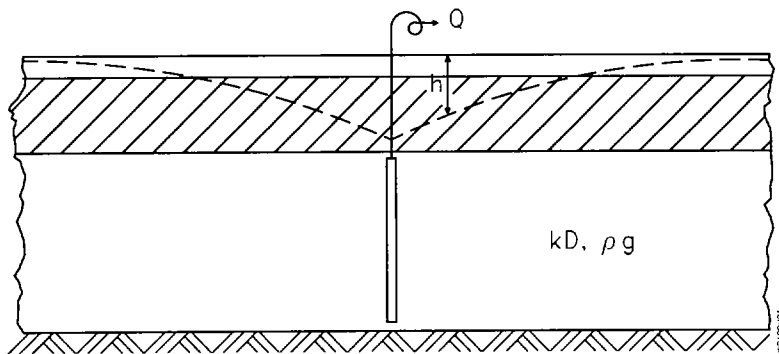
De boodschap van de vorige paragraaf is wat abstract, maar het is wel belangrijk om hem tot u door te laten dringen. Als we een model willen maken met zo weinig mogelijk knoppen om aan te draaien, dan moeten we zoveel mogelijk dimensies zien te vinden, en zo weinig mogelijk dimensiedragende parameters opvoeren. Om zo weinig mogelijk parameters op te voeren zorgen we ervoor dat we bij voorbaat al zoveel mogelijk parameters clusteren. Bijvoorbeeld: niet  $k$  en  $D$  apart opvoeren, maar als  $kD$  (als het probleem dat toelaat). Zo mogelijk proberen we het aantal dimensies uit te breiden. Dat lijkt mal, maar in het geval van grondwaterstroming kan dat. Een grondwaterstromingsprobleem kent normaal maar twee dimensies: [L] en [T]. Maar als we de wet van Darcy formuleren in termen van druk ( $N/m^2$ ), in plaats van stijghoogte (m), krijgen we er de dimensie [F] bij, en dat is pure winst. Ter herinnering: de wet van Darcy luidt

$$q = -k\nabla h$$

waarin  $h$  de stijghoogte is. Door over te gaan op de drukhoogte  $\rho gh$  introduceren we een kracht ( $\rho gh$  heeft dimensie  $N/m^2$  ofwel  $[L^{-2}F]$ ). Natuurlijk moeten we dan wel  $k$  door  $\rho g$  delen:

$$q = -\frac{k}{\rho g} \nabla \rho gh$$

( $k/\rho g$  heeft dimensie  $m^4/dN$  ofwel  $[L^4T^{-1}F^{-1}]$ ).



Figuur 2: Schema De Glee

Ik wil deze kennis gaan toepassen op een voorbeeld uit de geohydrologie. Laten we eens bezien hoeveel we—louter op grond van een dimensie-analyse—kunnen zeggen over de stationaire verlagingskegel rondom een put in semi-spanningswater (geval De Glee, figuur 2).

De dimensiedragende parameters zijn  $kD/\rho g$ ,  $\rho g c$ ,  $Q$ ,  $\rho g h$ , en  $r$ .  $Q$  is het debiet,  $h$  de verlaging en  $r$  de afstand tot de put. De dimensies zijn [L], [T] en [F]. Naar verwachting zijn er  $5 - 3 = 2$  dimensieloze parametergroepen.

Tabel 2 geeft de dimensiematrix weer. De twee dimensieloze produkten die we hieruit kunnen afleiden zijn

$$\frac{\frac{kD}{\rho g} \rho g h}{Q} = \frac{kD h}{Q} \quad \text{en} \quad \frac{r}{\sqrt{\frac{kD}{\rho g} \rho g c}} = \frac{r}{\lambda}$$

met  $\lambda = \sqrt{kDc}$

Hoe kom ik eraan? Ik gaf in paragraaf 3 een gestructureerde methode voor het vinden van dimensieloze produkten, die altijd werkt. In de praktijk gaat het vaak wat anders.

Tabel 2: Dimensiematrix geval De Glee

	(L)	(T)	(F)
$kD/\rho g$	5	-1	-1
$\rho g c$	-3	1	1
$Q$	3	-1	0
$\rho g h$	-2	0	1
$r$	1	0	0

Tabel 3: 1e hulpmatrix geval De Glee

	(L)	(T)	(F)
$kDc$	2	0	0
$kDh$	3	-1	0
$Q$	3	-1	0
$r$	1	0	0

Tabel 4: 2e hulpmatrix geval De Glee

	(L)	(T)	(F)
$kDc$	2	0	0
$kDh/Q$	0	0	0
$r$	1	0	0

In tabel 2 staan *drie* groepen waarin de dimensie [F] voorkomt. Hiervan maak ik *twee* groepen *zonder* [F]: ik vermenigvuldig  $kD/\rho g$  met  $\rho g c$  en plaats het resultaat  $kDc$  in tabel 3 (eerste rij). De bijbehorende dimensies vind ik door rij twee en rij één van tabel 2 op te tellen. Ik vermenigvuldig  $kD/\rho g$  ook met  $\rho g h$  (resultaat  $kDh$ , tweede rij van tabel 3). De bijbehorende dimensies vind ik door rij vier en rij één van tabel 2 op te tellen. De overige parameters,  $Q$  en  $r$ , verhuizen ongewijzigd naar tabel 3. In tabel 3 staan geen parameterclusters meer die [F] bevatten. Er staan nog wel *twee* clusters waarin de dimensie [T] voorkomt. Hiervan maak ik *één* cluster *zonder* [T]: ik deel  $kDh$  door  $Q$  en plaats het resultaat  $kDh/Q$  in tabel 4 (tweede rij). De bijbehorende dimensies vind ik door rij drie van tabel 3 af te trekken van rij twee. De parameters  $kDc$  en  $r$  verhuizen ongewijzigd naar tabel 4. In tabel 4 staat nu al mijn eerste dimensieloze produkt,  $kDh/Q$ . De overige twee clusters bevatten alleen [L]. Ze vormen samen mijn tweede dimensieloze produkt,

$$\frac{r}{\sqrt{kDc}} = \frac{r}{\lambda}$$

Ingevolge de  $\pi$ -stelling bestaat er nu een relatie

$$f\left(\frac{kDh}{Q}, \frac{r}{\lambda}\right) = 0$$

ofwel

$$\frac{kDh}{Q} = F\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (8)$$

waarin  $F$  een onbekende functie is. Verder kan de dimensie-analyse ons niet brengen. We kunnen 1 nog omwerken tot

$$h = \frac{Q}{kD} F \frac{r}{\lambda} \quad (9)$$

en herkennen dan al vrijwel de formule van De Glee:

$$h = \frac{Q}{2\pi kD} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (10)$$

De laatste stap van 9 naar 10 kunnen we niet via dimensie-analyse maken, maar het is toch verbazend hoever we komen door alleen maar de eis te stellen dat de dimensies moeten kloppen. Als de formule van De Glee nog niet bestond, zouden we met één modelrun (of met één praktijkproef) een grafiek kunnen tekenen van  $kDh/Q$  versus  $r/\rho$  en daarmee de standaardkromme in handen hebben voor het interpreteren van pompproeven in semi-spanningswater.

## 6. Nog een geohydrologisch voorbeeld

Louter voor de aardigheid geef ik nog een tweede geohydrologisch voorbeeld. Een poosje terug schreef ik in H<sub>2</sub>O een artikeltje onder de titel 'Dik freatisch pakket infiltreert niet lekker'. Ik nam de volledige wiskundige onderbouwing van die bewering in een appendix op, maar dat was voor veel lezers toch niet overtuigend. Laten we eens zien hoever we komen zonder complexe functies. Figuur 3 geeft het rekenschema. Er wordt geïnfilteerd via twee kanalen (breedte  $b$ ) en het water wordt gewonnen met putten die midden tussen de kanalen opgesteld zijn. In figuur 3 is alleen het linker deel van het systeem weergegeven; de putten vallen buiten de afbeelding. Het project mag op enige afstand geen invloed hebben op de buitenwereld, en we zorgen er daarom voor dat precies al het geïnfilteerde water gewonnen wordt. Niet meer en niet minder. Op die manier blijft het systeem gesloten en treedt er alleen in de directe omgeving enige beïnvloeding van de grondwaterstand op. De onbeïnvloede grondwaterstand op grote afstand kiezen we als referentiepeil. We noemen de waterhoogte in de sloten  $h$ , en we stellen de vanzelfsprekende voorwaarde dat de sloten niet mogen overlopen. *Wat voor aquifers bieden de beste perspectieven, dikke of dunne?* Mijn stelling is dat in een dik pakket de sloten eerder overlopen, dus dat dun beter is.

De dimensiedragende parameters zijn  $k/\rho g$ ,  $Q$ ,  $b$ ,  $D$  en  $\rho gh$ . De dimensies zijn [L], [T] en [F]. Tabel 5 geeft de dimensiematrix. We zien direct in dat de cluster  $b/D$  een dimensieloos produkt vormt. De drie overblijvende parameters vormen een dimensieloos produkt als ze geclusterd worden in de vorm

$$\frac{k}{\rho g} \frac{\rho gh}{Q} = \frac{kh}{Q}$$

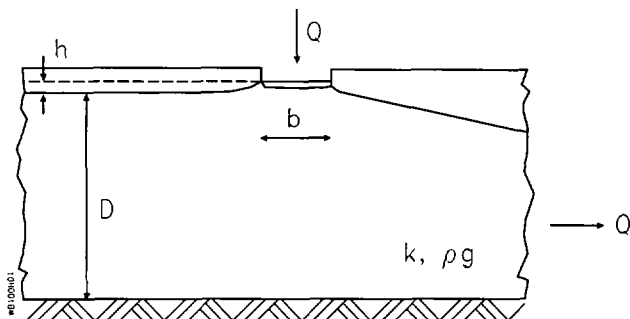
Er bestaat dus een functie

$$f\left(\frac{kh}{Q}, \frac{b}{D}\right) = 0$$

ofwel

$$h = \frac{Q}{k} F\left(\frac{b}{D}\right)$$





**Figuur 3:** Infiltratieproject

De waterstand  $h$  in de sloot is dus rechtevenredig met  $Q$  (wat ons niet verrast) en omgekeerd evenredig met  $k$  (eveneens volgens verwachting). Verder is  $h$  een onbekende functie van  $b/D$  (slootbreedte gedeeld door pakketdikte). Uiteraard is  $h$  een monotoon dalende functie van  $b$ ; ik kan me althans niets anders voorstellen. De consequentie is dat  $h$  een monotoon stijgende functie moet zijn van de pakketdikte  $D$ . Dus: hoe dikker het pakket, hoe eerder de sloot overloopt. Dunne pakketten bieden inderdaad betere perspectieven, maar natuurlijk is de  $k$ -waarde ook van belang. Het is dus netter om te zeggen: bij gelijke  $k$ -waarde bieden dunne pakketten de beste perspectieven.

## 7. Manipuleren van $\pi$ 's

Het is bij mijn twee geohydrologische voorbeelden waarschijnlijk wel opgevallen dat de keuze van de dimensieloze produkten niet van een zekere willekeur ontbloeit is. Ik heb ze zó gekozen dat het in mijn betoog mooi uitkwam. Dat mag en dat komt ook goed van pas. Stel dat  $\pi_1$  en  $\pi_2$  dimensieloze produkten zijn. Dan is  $\pi_1\pi_2$  ook een dimensieloos produkt. Dit nieuwe produkt is niet onafhankelijk van de oorspronkelijke produkten: het levert geen extra knop aan mijn model op. Wel kan de vorm  $\pi_1\pi_2$  om een of andere reden aantrekkelijker zijn. We kunnen dus enigszins met de  $\pi$ 's jongleren, om combinaties van parameters te krijgen die ons aanstaan. In het eerste voorbeeld wilde ik graag de groep  $r/\lambda$  te voorschijn zien komen; in het tweede voorbeeld de groep  $b/D$ . Of, om op de aanleiding tot dit artikel terug te komen: Als men de gevoeligheid van intrekgebieden wil aftasten voor bijvoorbeeld de intensiteit van de neerslag  $N$ , is het handig om de  $\pi$ 's zo te manipuleren dat  $N$  maar in één  $\pi$  voorkomt. Men hoeft dan maar aan één knop te draaien.

**Tabel 5:** Dimensiematrix infiltratieproject

	(L)	(T)	(F)
$k/\rho g$	4	-1	-1
$Q$	2	-1	0
$b$	1	0	0
$D$	1	0	0
$\rho g h$	-2	0	1

## 8. Discussie

De dimensie-analyse heeft veel meer verrassingen in petto, die ik oversla omdat ze niet in dit artikel nodig zijn. Wat het meest intrigeert is dat zulke vérgaande uitspraken gedaan kunnen worden zonder ook maar een begin te maken met het opschrijven van de wiskundige vergelijkingen die aan een model ten grondslag liggen. Die vergelijkingen hoeven zelfs niet te bestaan!

Toch zijn er ook wel valkuilen. Zo is mijn introductie van de dimensie [F] in de geohydrologische voorbeelden niet echt een open deur. Als wetenschapper ga ik er wel prat op, maar als ingenieur vind ik dat een rekentechniek niet van zulke invallen zou mogen afhangen. Zonder deze truc zou ik in de twee hydrologische voorbeelden met één  $\pi$  meer blijven zitten dan er in werkelijkheid zijn. Maar eerlijk is eerlijk, het ontbreken van [F] in de geohydrologie is niet aan de dimensie-analyse te wijten, maar aan Henry Darcy, die op het dubieuze idee kwam om zijn wet niet in termen van druk te formuleren (wat fysisch correct zou zijn), maar in termen van stijghoogten. In de volgende paragraaf zullen we nog een tweede amateuristische inval van Darcy tegenkomen, die ons tijdens een dimensie-analyse de das om kan doen.

De keuze van de dimensiedragende parameters is niet altijd vanzelfsprekend. Had ik, bijvoorbeeld, in het tweede geohydrologische voorbeeld niet tevens de afstand tussen de sloten en de putten moeten opvoeren? Het vereist soms een subtiele redenering om uit te maken welke parameters wél en welke niet meedoen. Hebben we parameters gemist, dan vinden we te weinig  $\pi$ 's, wat uitermate verraderlijk is. Ons model wordt dan een voertuig met te weinig vrijheidsgraden, ongeveer zoals een auto waarvan het stuur alleen linksom draait. Het kan ook gebeuren dat men parameters introduceert die helemaal geen rol spelen. In het geval van de slinger waren we zo fortuinlijk dat we konden zien dat de massa m niet van belang was, maar er is geen garantie dat ongewenste parameters altijd vanzelf wegvallen.

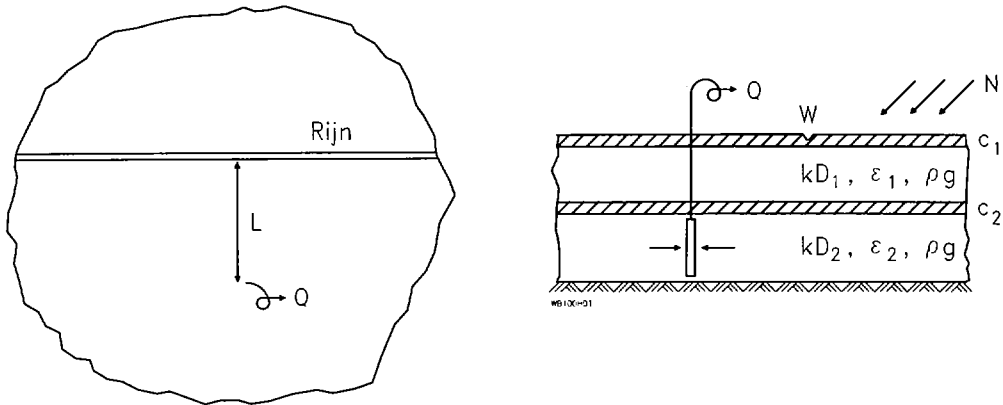
Niettemin heeft de dimensie-analyse ons een aantal belangrijke zaken geleerd, die we anders waarschijnlijk niet op het spoor waren gekomen:

*Een model waarvan de parameters dimensiedragend zijn, is niet eenduidig af te regelen. Het heeft teveel knoppen om aan te draaien.*

Dit volgt uit de  $\pi$ -stelling. Om de onafhankelijke parameters van een model te vinden is het noodzakelijk dat we het model in dimensieloze vorm gieten. Als men de dimensieloze producten ( $\pi$ 's) gevonden heeft mag men naar believen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen om parameterclusters te krijgen die voor het afregelen optimaal zijn.

## 9. Verblijftijdzones

Ik kom nu aan mijn *pièce de resistance*: de gevoeligheid van de oppervlakte van intrekgebieden voor onzekerheden in de modelparameters. Wim Athmer bestudeerde deze kwestie aan de hand van een numeriek model van de winplaats Immerloopark. Figuur 4 geeft een gestileerde lay-out van het probleem. Het model onderscheidt twee aquifers; er wordt water gewonnen uit het tweede pakket. De winning ligt in een gebied met beheerst polderpeil, op enige afstand van de Rijn die onvolkomen in contact staat met de bovenste aquifer.



**Figuur 4:** Lay-out van Immerlooppark

De hydrologische parameters die het vraagstuk beheersen zijn  $kD_1$  ( $m^2/d$ ),  $kD_2$  ( $m^2/d$ ),  $c_1$  (d),  $c_2$  (d) en de infiltratieweerstand van de rivier,  $W$  (d/m). De relevante peilen zijn het polderpeil  $p$  (m) en het rivierpeil  $p_r$  (m). De heersende fluxen zijn de neerslag  $N$  (m/d) en het winningsdebiet  $Q$  ( $m^3/d$ ). Er spelen twee geometrische parameters een rol: de afstand  $L$  (m) van de winning tot de rivier en de oppervlakte  $A$  ( $m^2$ ) van het intrekgebied.

In de gegeven situatie is de vraag naar de omvang van het intrekgebied niet erg interessant: het is altijd oneindig groot, hoe ik mijn parameters ook kies. Ik concentreer me daarom liever op verblijftijdzones, die in de praktijk vaak interessanter zijn. Daarmee introduceer ik wel een extra parameter, de verblijftijd  $T$  (d).

Om de dimensie [F] te kunnen benutten ga ik van  $kD_1$ ,  $kD_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $p$ ,  $p_r$  over op  $kD_1/\rho g$ ,  $kD_2/\rho g$ ,  $\rho g c_1$ ,  $\rho g c_2$ ,  $\rho g p$  en  $\rho g p_r$ . Zoals ik in paragraaf 5 al aanstipte hoort de dimensie [F] fysisch gesproken thuis in de geohydrologie. In het dagelijks gebruik komt hij niet meer voor, doordat Darcy zijn wet in termen van stijghoogten formuleerde. (Heel lastig als we te maken hebben met brak grondwater). Darcy was ook al minder gelukkig toen hij het specifieke debiet verkoos boven de stroomsnelheid van het grondwater. Wie van ons is daardoor nog nooit in verlegenheid gebracht? (Oeps! Vergeten de verblijftijd te delen door de porositeit...). Omwille van de consistentie moet de verblijftijd  $T$  gedeeld worden door  $\epsilon_1 D_1$  (eerste pakket) resp.  $\epsilon_2 D_2$  (tweede pakket). Ik voer dus de clusters  $T/\epsilon_1 D_1$  en  $T/\epsilon_2 D_2$  in. Waarom deel ik ook door de pakketdikten? In beide aquifers is het debiet evenredig met  $Q$ . Het specifieke debiet—waaruit de werkelijke snelheid wordt afgeleid—is dus evenredig met  $Q$  gedeeld door de pakketdikte.

Is er nog meer te zeggen voordat ik de dimensiematrix opstel? Inderdaad: als er geen winning en geen rivier zouden zijn, zou het polderpeil (dat overal dezelfde waarde heeft) geen horizontale stroming veroorzaken. Hetzelfde geldt voor de neerslag; het enige effect daarvan is dat de grondwaterspiegel stijgt tot een hoogte  $Nc_1$  boven het polderpeil. (Ik vat hier  $c_1$  op als drainageweerstand van het slotenstelsel; er zijn varianten denkbaar). Als ik een rivier introduceer met een rivierpeil dat gelijk is aan de grondwaterspiegel, dan treedt er nog steeds geen horizontale stroming op, welke weerstand ik ook aan de rivier toeken.

De invloed die polderpeil, neerslag en rivierpeil op de grondwaterstroming hebben hangt dus af van  $p_r - (p + Nc_1)$ . Ik concludeer dat  $p$ ,  $N$  en  $p_r$  niet als afzonderlijke parameters voorkomen, maar alleen in de combinatie  $p_r - p - Nc_1$ .

Tabel 7: Dimensiematrix Immerloo-park

	(L)	(T)	(F)
$kD_1/\rho g$	5	-1	-1
$kD_2/\rho g$	5	-1	-1
$\rho g c_1$	-3	1	1
$\rho g c_2$	-3	1	1
$Q$	3	-1	0
$T/\varepsilon_1 D_1$	-1	1	0
$T/\varepsilon_2 D_2$	-1	1	0
$A$	2	0	0
$\rho g W$	-4	1	1
$L$	1	0	0
$\rho g(p_r - p - Nc)$	-2	0	1

Ik kom zo tot de dimensiematrix die als tabel 7 is weergegeven. Het is direct in te zien dat  $kD_1/kD_2$ ,  $\varepsilon_1 D_1/\varepsilon_2 D_2$  en  $c_1/c_2$  dimensieloze producten zijn. Deze groepen plaats ik in het onderste deel van de matrix, en ik ga verder met het bovenste deel (tabel 8), op de manier van paragraaf 3. Tenslotte kom ik uit op

$$\frac{A}{\lambda_1^2} = f \left( \frac{QT}{\varepsilon_1 D_1 \lambda_1^2}, \frac{L}{\lambda_1}, \frac{kD_1 W}{\lambda_1}, \frac{kD_1(p_r - p - Nc_1)}{Q}, \frac{kD_1}{kD_2}, \frac{c_1}{c_2}, \frac{\varepsilon_1 D_1}{\varepsilon_2 D_2} \right) \quad (11)$$

met  $\lambda = \sqrt{kD_1 c_1}$ .

(Het is mogelijk dat u andere groepen vindt, maar die zijn dan in de bovenstaande  $\pi$ 's om te werken).

Tabel 8: Hulpmatrix Immerloopark

	(L)	(T)	(F)
$kD_1/\rho g$	5	-1	-1
$\rho g c_1$	-3	1	1
$Q$	3	-1	0
$T/\varepsilon_1 D_1$	-1	1	0
$A$	2	0	0
$\rho g W$	-4	1	1
$L$	1	0	0
$\rho g(p_r - p - Nc)$	-2	0	1
$kD_1/kD_2$	0	0	0
$c_1/c_2$	0	0	0
$\varepsilon_1 D_1/\varepsilon_2 D_2$	0	0	0

## 10. Generalisatie

Hoewel het model Immerloopark (in deze gestileerde vorm) dertien dimensiedragende parameters bezit, heeft het maar acht onafhankelijke knoppen. Deze  $\pi$ 's kunnen gegroepeerd worden naar oorsprong. Als er maar één aquifer zou zijn, en géén rivier, dan veranderde de relatie in

$$\frac{A}{\lambda_1^2} = f\left(\frac{QT}{\varepsilon_1 D_1 \lambda_1^2}\right)$$

Als er één aquifer was plus een rivier, dan werd de relatie

$$\frac{A}{\lambda_1^2} = f\left(\frac{QT}{\varepsilon_1 D_1 \lambda_1^2}, \frac{l}{\lambda_1}, \frac{kD_1 W}{\lambda_1^2}, \frac{kD_1(p_r - p - Nc_1)}{Q}\right)$$

En als er twee aquifers waren zonder rivier:

$$\frac{A}{\lambda_1^2} = f\left(\frac{QT}{\varepsilon_1 D_1 \lambda_1^2}, \frac{kD_1}{kD_2}, \frac{c_1}{c_2}, \frac{\varepsilon_1 D_1}{\varepsilon_2 D_2}\right)$$

Op grond hiervan is eenvoudig in te zien hoeveel en wat voor  $\pi$ 's erbij komen als er meer rivieren zijn, of meer aquifers. Als er ook aan het eerste pakket water onttrokken wordt, worden we verrijkt met een groep  $Q_1/Q_2$ .

Als een eigenschap van een laag in horizontale zin sprongsgewijs verandert, bijvoorbeeld van  $kD_{11}$  naar  $kD_{12}$ , vermoed ik een extra groep  $kD_{11}/kD_{12}$  (maar daarover heb ik nog niet goed nagedacht). Als er sprake is van een tweede polderpeil vermoed ik een extra groep  $(p_2 - p - Nc)/(p_r - p - Nc)$ .

## 11. Wat kan ik ermee? (1)

Uitdrukking 11 behoedt me voor het variëren van parameters die feitelijk afhankelijk zijn. In het algemeen zal een deel van de parameters relatief goed bekend zijn. In het geval van Immerloopark werd besloten om alleen de waarden van  $c_1, c_2, W$  en  $N$  te variëren, waarover de minste zekerheid bestond. Hoe kom ik er nu achter of er tussen deze vier parameters een afhankelijkheidsrelatie bestaat?

Eerst probeer ik door manipulatie van de  $\pi$ 's deze parameters zoveel mogelijk in aparte groepen onder te brengen. Het beste wat ik er van weet te maken is

$$\frac{A}{L^2} = f\left(\frac{QT}{\varepsilon_1 D_1 L^2}, \frac{L^2}{kD_1 c_1}, \frac{kD_1 W}{L}, \frac{kD_1(p_r - p - Nc_1)}{Q}, \frac{kD_1}{kD_2}, \frac{L^2}{kD_1 c_2}, \frac{\varepsilon_1 D_1}{\varepsilon_2 D_2}\right)$$

Ik kan  $W$  en  $c_2$  in aparte  $\pi$ 's krijgen, dus deze parameters zijn geheel onafhankelijk. Maar ik zie geen kans om  $N$  los te koppelen van  $c_1$ . Zijn de groepen

$$\frac{L^2}{kD_1c_1} \text{ en } \frac{kD_1(p_r - p - Nc_1)}{Q}$$

nu wel of niet afhankelijk? De test is de *definitie van afhankelijkheid*: twee  $\pi$ 's zijn afhankelijk als er getallen  $\alpha$  en  $\beta \neq 0$  bestaan, waarvoor  $\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 = 0$ . Zulke getallen zijn niet te vinden, dus ook  $c_1$  en  $N$  kunnen afzonderlijk gevarieerd worden.

## 12. Wat kan ik ermee? (2)

Een probleem dat nauw verwant is aan deze materie is de optimalisatie van parameters, zoals dat gebeurt bij het ijken van modellen. Als het optimalisatieprobleem in termen van onafhankelijke  $\pi$ 's gesteld kan worden, hebben we te maken met een 'orthogonale parameterruimte'. In een orthogonale ruimte is het vinden van optima relatief eenvoudig: variatie van één  $\pi$  laat de waarden van de andere  $\pi$ 's ongemoeid.

## Suggesties voor literatuur

**De St Q. Isaacson, E. en M. de St Q. Isaacson** (1975) *Dimensional Methods in Engineering and Physics*, Edward Arnold, Londen.

**Kline, S.J.** (1965) *Similitude and Approximation Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York.

**Langhaar, H.L.** (1980) *Dimensional Analysis and Theory of Models*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York.

**Maas, C.** (1995) Dik freatisch pakket infiltreert niet lekker, *H2O* (28) 1995, nr.5

**Massey, B.S.** (1971) *Units, Dimensional Analysis and Physical Similarity*, Van Nostrand Reinhold Company, London.

**Taylor, E.S.** (1974) *Dimensional Analysis for Engineers*, Clarendon Press, Oxford.

Kees Maas is werkzaam bij:

Kiwa Onderzoek en Advies

Postbus 1072

3430 BB Nieuwegein

en

Sectie Hydrologie en Ecologie

Technische Universiteit Delft