
Nieuwe inzichten in het gebruik van voedingsweerstand of drainageweerstand in de randvoorwaarde van een grondwatermodel

Deel 2: Het gebruik van de randvoorwaarde

Wim de Lange

Inleiding

Deze serie artikelen behandelt het modelleren van de interactie tussen oppervlaktewater en grondwater in de bovenrand van een computermodel. In het eerste deel van deze serie zijn de formules voor het gebruik van de voedingsweerstand en drainageweerstand formeel wiskundig afgeleid. De basisvergelijkingen (Cauchy-randvoorwaarde) herhalen we nog even (zie deel 1):

$$\begin{aligned} \text{Voor de voedingsweerstand:} \quad s &= \frac{(p^* - \phi)}{c^*} \\ \text{Voor de drainageweerstand:} \quad q &= \frac{(h_{\text{gem}} - P_{\text{drain}})}{c_{\text{drain}}} \end{aligned}$$

waarin p^* het gemodificeerde oppervlaktewaterpeil en c^* de voedingsweerstand is (zie ook later in dit artikel).

Alle symbolen staan in de lijst aan het einde van dit artikel. Let op dat in het eerste artikel zowel λ en l als ϕ en f dezelfde betekenis hebben (vanwege editing problemen).

In het eerste deel is zijdelings ingegaan op bestaande formules en het gebruik daarvan in randvoorwaarden van computermodellen. We gaan er vanuit dat de lezer dat deel hier bij de hand heeft. In dit artikel wordt de bestaande praktijk van het gebruik in randvoorwaarden van computermodellen tegen het licht gehouden. Belangrijke onderwerpen daarin zijn het omgaan met de formules van Ernst en Bruggeman (inclusief de door anderen aangepaste versies daarvan) en de conclusies die uit vergelijkingen tussen de verschillende formuleringsvormen kunnen worden getrokken (o.a. over het belang van de drainageweerstand).

Wim J. de Lange is werkzaam bij het RIZA, Postbus 17, 8200 AA Lelystad, Telefoon: (0320) 29 87 38, E-mail: w.dlange@riza.rws.minvenw.nl.

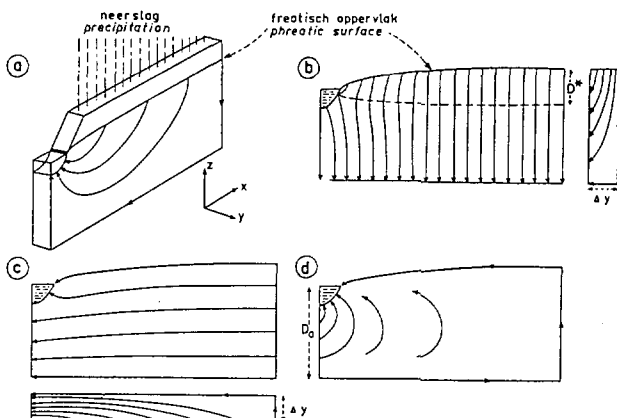
Aan het einde van dit artikel gaan we in op een aantal praktische punten zoals onder welke omstandigheden nog mag worden gewerkt met deze randvoorwaarde en in welke situaties de drainageweerstand dan wel de voedingsweerstand de voorkeur heeft.

Vergelijking van de bestaande praktijk met de nieuwe inzichten

A De Ernst-benadering

Onder andere in zijn proefschrift (Ernst, 1962) en in het later beroemd geworden artikel in *Journal of Hydrology* (Ernst, 1978) heeft Ernst de basis gelegd voor het bepalen van drainageweerstanden.

Het modelconcept van Ernst bestaat uit het optellen van weerstanden die het grondwater ondervindt op zijn weg tussen het freatische vlak en het ontwateringsmiddel. Hoewel de resulterende formule in bepaalde gevallen tot goede resultaten leidt (zie in het vervolg van deze paragraaf), is het op deze wijze optellen van weerstanden formeel wiskundig en fysisch onjuist. Het eenvoudigst is dit te zien aan het feit dat de weerstanden niet onafhankelijk en serieel zijn geschakeld vanuit de grondwaterstroming gezien. (Er zit op zijn minst een overlap en dus een terugkoppeling in.) Ook levert het optellen van de bijbehorende stromingspatronen (figuur 1 b + c + d, is figuur 7 uit proefschrift Ernst, 1962) niet de gewenste stromingssituatie (figuur 1 a) op (kijk alleen maar naar de som van de randvoorwaarden op elke rand). Feitelijk is het optellen van weerstanden eigenlijk het optellen van modellen. Achter het optellen van modellen steekt echter een hele theorie, die ik nog in een artikel in *STROMINGEN* zal presenteren.



Figuur 1: Combinatie van modellen (en dus weerstanden) volgens Ernst 1962.

In zijn meest complete vorm ziet de voedingsweerstand volgens de Ernst-benadering (dus niet volgens Ernst zelf) er als volgt uit (zie ook Van Drecht, 1997).

$$c_{\text{Ernst}}^* = c_{\text{hor}} + c_{\text{sch}} + c_{\text{vert}} + c_{\text{int}} + c_{\text{rad}} \quad (1)$$

En uit de genoemde literatuur komen we dan tot de volgende formule (bij het kiezen van de vormfactor gelijk aan $2/3$ in de formule van Ernst (1983) voor de horizontale weerstand).

$$c_{\text{Ernst}}^* = \frac{L^2}{12kH} + c_1 + \frac{H}{k_v} + c_0 \frac{L}{B} + \frac{L}{\pi \alpha k_h} \ln \frac{H}{B} \quad (2)$$

We kunnen de eerste drie termen van de rechterzijde van (2) herschrijven tot (zie symbolenlijst):

$$\frac{L^2}{12kH} + c_1 + \frac{H}{k_v} = c_1' \left(1 + \frac{L^2}{12\lambda^2} \right) = c_1' \left(1 + \frac{1}{3} \frac{L^2}{2\lambda^2} \right) = c_1' G_L \quad (3)$$

De functie G_L is te vinden in deel 1 (formule 14). We kunnen (2) nu herschrijven tot:

$$c_{\text{Ernst}}^* = c_1' G_L + \frac{c_0 L}{B} + W_{\text{rad}} \quad (4)$$

De laatste stap is uitgevoerd om tot een uitdrukking te komen die zoveel mogelijk overeenkomt met vergelijking (13) uit deel 1. Deze noemen we hier de G -benadering en herhalen we nog even:

$$c^* = (c_0 + c_1') G_L + \frac{c_0 L}{B} G_B \quad (5)$$

De functie G_B is gelijk aan G_L alleen nu met B in plaats van L . De overeenkomst is treffend: Als c_0 klein is ten opzichte van c_1 zijn de eerste termen aan de rechterzijde gelijk. Als G_B gelijk is aan 1 (dus als $B < 2\lambda_B$) zijn de tweede termen gelijk. De c_0 in de term met G_L geeft een terugkoppeling aan die niet uit de Ernst-methode blijkt. De radiale weerstand komt niet voor in (5). In de afleiding van (5) is de verticale weerstand in het watervoerend pakket samengetrokken met de weerstand van de scheidende laag (Dupuit-Forchheimer-aanname). Later in dit artikel komen we terug op het gebruik van de radiale weerstand.

Uit de vergelijking van (4) en (5) concluderen we dat in het Ernst-geval de voedingsweerstand (en dus de drainageweerstand, zie deel 1) wordt aangenomen dat de stroming constant (gelijkmatig verdeeld) is over de scheidende laag tussen het freatische pakket en het onderliggende regionale watervoerend pakket.

Hoewel de overeenkomst tussen de historisch gegroeide Ernst-benadering voor c^* en de in deel 1 afgeleide c^* groot is, wordt in de huidige praktijk voor p^* en p_{drain} gewoon het oppervlaktepeil gebruikt. Daarin schuilt een groot gevaar van foute modeluitkomsten (zie voorbeeld in hoofdstuk 'Gebruik in de praktijk'), omdat dan de afwijking $p^* - p$ wordt gecorrigeerd door andere parameters in het model bij te stellen.

B De Bruggeman-benadering

In een bijlage van een RID-rapport uit 1972 wordt 'de' (aanhalingstekens omdat Bruggeman veel meer formules heeft afgeleid) formule van Bruggeman gepresenteerd. De oplossing van Bruggeman geldt voor het geval met 2-dimensionale stroming in een schematisatie als in figuur 2 van deel 1. Aan de onderkant van het schema wordt de stijghoogte onder de scheidende laag constant verondersteld, hetgeen overeenkomt met het eerste geval dat in deel 1 is gepresenteerd. Echter onder het oppervlaktewater wordt constante stroming verondersteld, waarvan de waarde bepaald wordt met behulp van de grondwaterstand in het midden. In de schematisatie van Bruggeman zit dus eigenlijk zowel de intreeweerstand als de radiale weerstand (in de 2-dimensionale stroming).

De oplossing van Bruggeman is in de huidige praktijk gebruikt ter bepaling van zowel de voedingsweerstand als de drainageweerstand, maar tot voor kort bestonden voor geen van beide formeel wiskundig afgeleide uitdrukkingen. De uit Bruggemans oplossing volgende constanten (p^* , c^*) in de Cauchy-randvoorwaarde (zie inleiding) zijn pas recentelijk (De Lange, 1996) afgeleid (met dank aan de heer Bruggeman voor de verificatie).

$$p^* = p + P_n(c^* - c'_1 - c_0) \quad (6)$$

$$c^* = c_0 \frac{L}{B} + c_0 + c'_1 + \kappa_3 \frac{B+L}{k_v} \quad (7)$$

waarin κ_3 een Fourrierreeks bevat en beschreven is in mijn proefschrift (De Lange, 1996, pag 150–151). Opvallend is de exacte gelijkheid van de Bruggeman-oplossing voor p^* met die zoals gegeven in deel 1. Ook in de formule van c^* komen we weer bekende termen tegen. De formules voor p_{drain} en c_{drain} blijken gelijk te zijn aan die gepresenteerd in deel 1 ($p_{\text{drain}} = p - P_n$ en $c_{\text{drain}} = c^* - c'_1$). Evenals in het geval van de Ernst-benadering is tot nu toe in de modelrandvoorwaarde voor zowel de voedingsweerstand als de drainageweerstand het gewone peil gebruikt.

C De De Lange-benadering

Deze benadering is in deel 1 reeds afgeleid. De formule voor p^* is in dit geval gelijk aan (6) en de formule voor c^* wordt hier alleen herhaald, omdat we die hier nog weer zullen gebruiken.

$$c^* = (c_0 + c'_1)F_L + c_0 \frac{L}{B}F_B \quad (8)$$

waarin $F_I = X_1 \text{ctnh} X_I$ en $X_I = I/2\lambda_I$ met $I = B, L$ (zie deel 1 formule (8)).

De overeenkomsten en verschillen tussen de verschillende benaderingen en de betekenis daarvan in de praktijk

Uit het bovenstaande concluderen we dat in de bestaande praktijk van het modelleren met drainage- en voedingsweerstand gewoon de oppervlaktewaterpeilen worden gebruikt in plaats van het bijbehorende gemodificeerde peil (p^* , p_{drain}), omdat deze laatste voorheen nooit was afgeleid.

Een tweede conclusie is dat er nu drie wiskundig-correct-afgeleide formulerings voor de parameters in de (Cauchy-) modelrandvoorwaarde zijn waaruit uitdrukkingen voor zowel drainage- als voedingsweerstand afgeleid kunnen worden:

- 1 de Bruggeman-benadering;
- 2 de De Lange-benadering zie formule (8);
- 3 de G -benadering zie formule (5), die sterk lijkt op de Ernst-benadering.

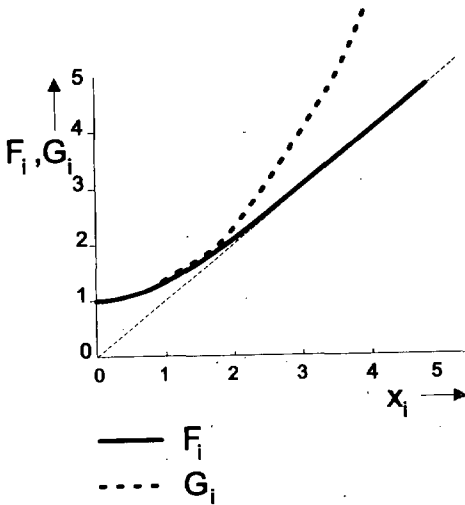
Bij mijn weten zijn er geen andere formeel wiskundig afgeleide formulerings. In ieder geval behoren de andere in dit artikel genoemde formulerings daar niet toe.

De verschillen tussen de drie benaderings komen op het volgende neer.

- De Bruggeman-benadering gaat uit van 2-dimensionale stroming (in het verticale vlak) in het topsysteem met variërende stroming van/naar het onderliggende regionale watervoerende pakket en constante stroming over de bodem van het oppervlaktewater.
- De De Lange-benadering gaat uit van 1-dimensionale stroming (in het verticale vlak) in het topsysteem met een variërende stroming van/naar het onderliggende regionale watervoerende pakket en het oppervlaktewater.
- De G -benadering gaat uit van 1-dimensionale stroming (in het verticale vlak) in het topsysteem met een constante stroming van/naar het onderliggende regionale watervoerende pakket en het oppervlaktewater.

In alle drie deze gevallen zijn de uitdrukkingen voor p^* , p_{drain} en c_{drain} gelijk, maar verschilt de uitdrukking voor c^* . Zijn de c^* -waarden in twee gevallen (on)gelijk, dan zijn ook de andere waarden (on)gelijk. Uit verschillen in de waarden van c^* volgen ook de verschillen in de fluxen s en q . Bij het vergelijken van fluxen wordt wel de praktische waarde van de onderlinge verschillen aangetoond, maar die worden vertroebeld door de keuze van bijkomende parameters zoals oppervlaktewaterpeil, stijghoogte en netto grondwateraanvulling. Daarom richten we ons op de verschillen in de voedingsweerstand c^* .

Uit de vergelijking tussen de De Lange-benadering en de G -benadering volgt het verschil tussen variërende stroming en constante stroming van/naar het onderliggende watervoerende pakket of het oppervlaktewater. Uit de vergelijking tussen de Bruggeman-benadering en de De Lange-benadering kunnen we vaststellen wat het effect van de vereenvoudiging van 2-d naar 1-d stroming is op de parameters in de Cauchy-randvoorwaarde. Hierbij wordt duidelijk wat het effect van de gekromde stroomlijnen nabij het oppervlaktewater is in termen van weerstand, meestal uitgedrukt in de radiale weerstand.



Figuur 2: Vergelijking functies F_i en G_i .

A Vergelijking van de G -benadering en de De Lange-benadering

Uit de parallellen tussen formules (5) en (8) volgt dat de verschillen worden veroorzaakt door de verschillen in de functies F_I en G_I ($I = B, L$), die zijn uitgezet in figuur 2. Voor kleine waarden ($\ll 1$) van X_B (slootbreedte-invloed) en X_L (slootafstand-invloed) zijn zowel de F_I - als de G_I -functie gelijk aan 1 en zijn dus de benaderingen gelijk. Voor grotere waarden (> 1) geeft de G -benadering duidelijk hogere waarden voor de weerstand omdat in de G_I -functie X_I^2 staat en in de F_I -functie X_I .

Het feit dat beide benaderingen zo verschillen zegt nog niets over welke nu de beste is. Om daarop een antwoord te krijgen

heb ik in paragraaf 6.3 van mijn proefschrift de F -benadering vergeleken met een analytische oplossing voor een twee-lagen-model. Daaruit bleek dat er goede overeenstemming tussen deze benaderingen is en dus is er geen goede overeenstemming met de G -benadering. Hierop kom ik in het derde artikel nog terug.

De G -benadering wordt onjuist voor grote X_I omdat de flux over de scheidende laag dan nog steeds constant wordt genomen terwijl dat niet meer zo kan zijn (zie deel 1). Het water wordt in feite te ver over de scheidende laag getransporteerd. Dit geldt dus zowel voor relatief brede oppervlaktewateren ($B/2\lambda_B > 3$) als voor relatief grote afstanden tussen de oppervlaktewateren ($L/2\lambda_L > 3$). In λ_B en λ_L zitten $k h H$, c_0 en c_1 en dus geldt hetzelfde voor kleine waarden van deze parameters.

B De vergelijking tussen de Bruggeman-benadering en de De Lange-benadering

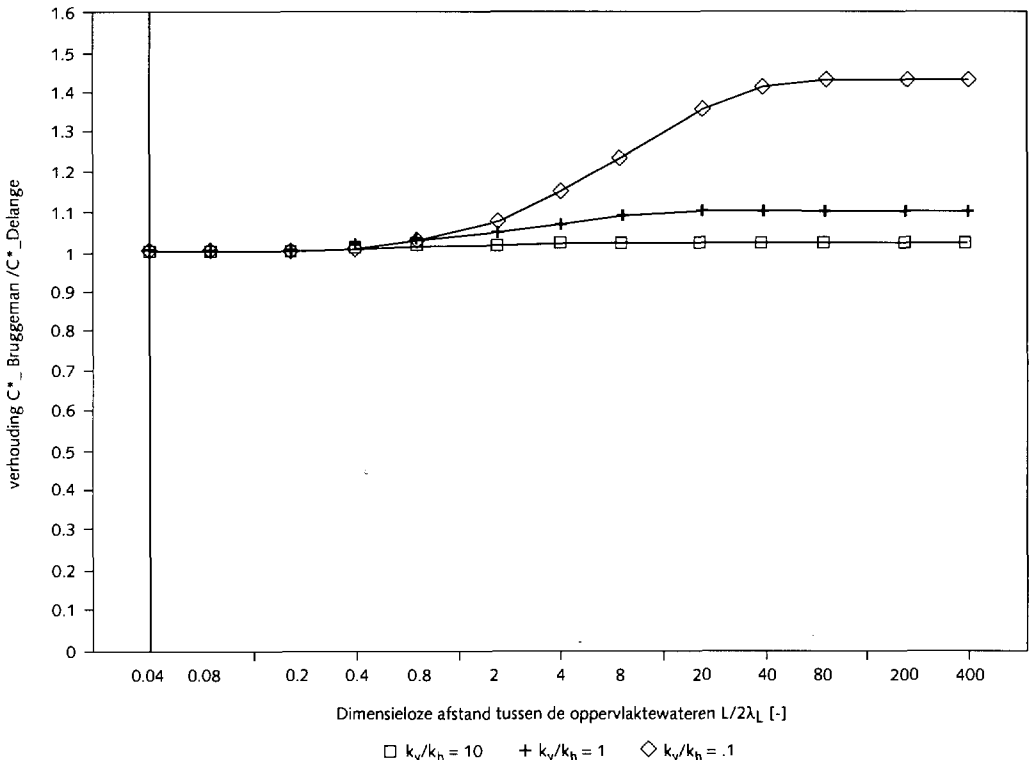
Deze vergelijking willen we concentreren op het verschil tussen het rekenen met 2-dimensionale stroming en het rekenen met 1-dimensionale stroming. Omdat in de schematisatie van Bruggeman de stroming onder het oppervlaktewater constant is maar in de De Lange-benadering niet, moet de breedte van het water relatief klein genomen worden (anders introduceren we daar het boven beschreven verschil tussen de De Lange- en de G -benadering). De Bruggeman-benadering leidt dus voor $B/2\lambda_B > 3$ tot te grote waarden voor de weerstanden vanwege de constante stroming door de onderrand van het oppervlaktewater. Een oplossing voor het Bruggeman-geval met variabele stroming over de laag onder het oppervlaktewater is mij echter niet bekend.

Omdat de formule van de oplossing van Bruggeman niet eenvoudig geanalyseerd kan worden is de toevlucht genomen tot het vergelijken van numerieke uitkomsten.

Tabel 1: Standaard parameterwaarden in de vergelijking (zie foelichting in tekst).

Parameter	c_0	c_1	k_h	k_v	H	B
Eenheid	d	d	m/d	m/d	m	m
Standaard waarde	1	10	1	1	4	0,1

In figuur 3 worden de verhoudingen van de voedingsweerstand volgens De Lange en Bruggeman (d.w.z. $c^*(9)/c^*(7)$) gepresenteerd voor drie verschillende waarden van k_v (0,1; 1; 10) met daarbij de andere parameters volgens tabel 1. We zien in alle gevallen voor $X_L < 0,5$ volledige gelijkenis (< 1% afwijking). We hebben dezelfde berekeningen ook gedaan voor $c_0 = 0,1$ en $c_0 = 10$ (d). Dan zien we dat alleen voor het geval dat $k_v = 0,1$ en $c_0 = 0,1$ de gelijkenis geldt tot $X_L < 0,2$. Dit betekent dat er voor kleine X_L geen relevant verschil in de waarde van de voedingsweerstand is tussen het geval gebaseerd op 2-dimensionale stroming en dat gebaseerd op 1-dimensionale stroming. De oorzaak hiervan is c_1 in de term $(c_0 + c_1)F_B$ die in die gevallen overheerst in de waarde van de voedingsweerstand. In deze gevallen is de radiale weerstand dus niet relevant voor de voedingsweerstand. Maar juist alleen in deze gevallen ($L \ll 2\lambda_L$) is de G -benadering en dus Ernst-benadering juist (zie boven, figuur 2). De conclusie is dan ook dat de radiale weerstand in de Ernst-benadering voor de voedingsweerstand verwaarloosd kan worden.



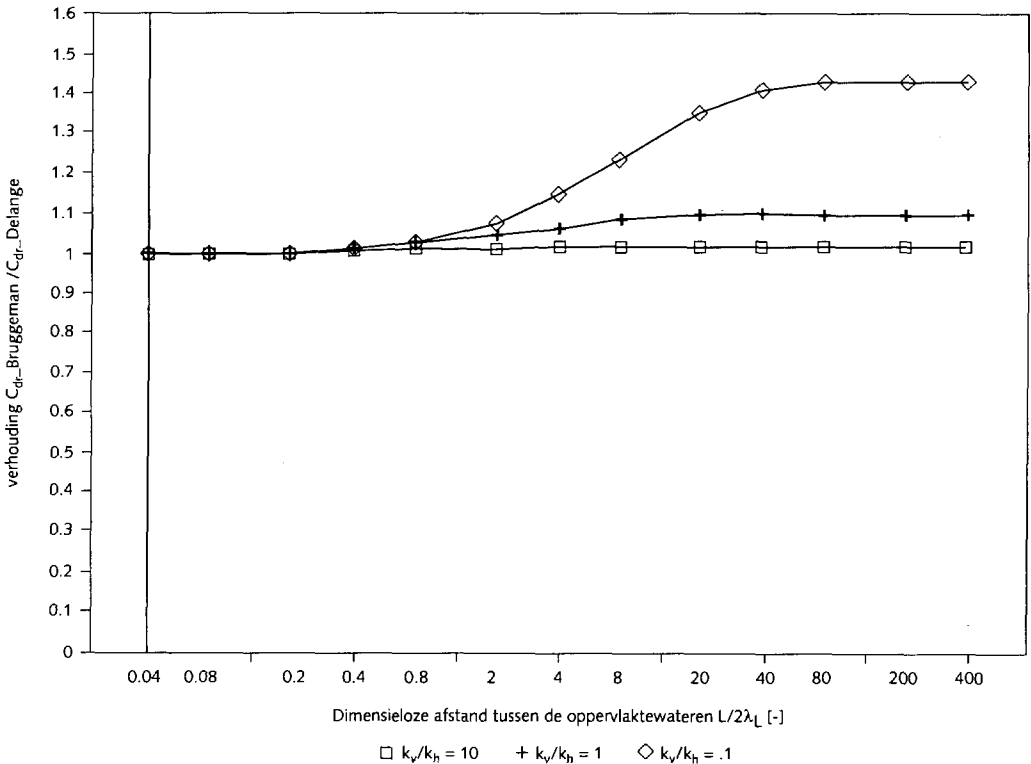
Figuur 3: Verhouding voedingsweerstand c^* -De Lange / c^* -Bruggeman voor $c_0 = 1$ en zonder toevoeging van radiale weerstand.

Voor de drainageweerstand ligt dat enigszins anders. Figuur 4 laat dezelfde vergelijking zien als figuur 3 alleen nu voor de verhouding in drainageweerstand. In figuur 4 zien we al direct een kleine afwijking optreden voor de kleine waarden van k_v . Bij kleine c_0 wordt dit effect nog sterker. Het blijft evenwel voor kleine L/λ_L steeds maar een kleine afwijking.

Als de waarden van $L/2\lambda_L$ groter worden dan 2 treden er relevante afwijkingen op tussen de voedingsweerstand. Voor zeer grote $L/2\lambda_L$ wordt de verhouding tussen de voedingsweerstand toch steeds weer constant. De beide formuleringen worden dus lineair in L . Vanwege die constante verhouding kijken we naar de verhouding tussen de voedingsweerstand voor $X_L \geq 3$ in tabel 2.

Tabel 2: Afwijkingen in de verhouding van voedingsweerstand $c^*(9)/c^*(7)$ voor $X_L > 3$, zonder correctie voor de radiale weerstand.

	$k_v = 10$	$k_v = 1$	$k_v = 0,1$
$c_0 = 10$	< 0,1%	< 1%	< 4%
$c_0 = 1$	< 1%	< 10%	< 40%
$c_0 = 0.1$	< 15%	< 60%	< 250%



Figuur 4: Verhouding drainageweerstand c_{drain} -De Lange / c_{drain} -Bruggeman voor $c_0 = 1$ en zonder toevoeging van radiale weerstand.

Afwijkingen in de orde van 10–15% liggen binnen de nauwkeurigheid van modelleren. Dat betekent dat de 1-dimensionale benadering niet meer goed genoeg is als de c_0 klein wordt ten opzichte van c_1 en sprake is van sterke anisotropie en bovendien de afstand tussen de oppervlaktewateren relatief groot is ($L/2\lambda_L > 3$).

In de verschillen in de waarden van de drainageweerstand zien we in het algemeen een groter verschil bij kleine waarden van k_v en c_0 . Het dempend effect van c_1 in de term met F_L is nu afwezig.

Tabel 3: Afwijkingen in de verhoudingen van drainageweerstanden $(c'(9) - c_1') / (c'(7) - c_1')$ voor $X_L > 3$ zonder correctie voor de radiale weerstand.

	$k_v = 10$	$k_v = 1$	$k_v = 0,1$
$c_0 = 10$	< 0,1%	< 0,5%	< 4%
$c_0 = 1$	< 1,5%	< 10%	< 45%
$c_0 = 0,1$	< 20%	< 200%	< 320%

In de gevallen met grote afwijkingen zou de radiale weerstand een relevante rol kunnen spelen, omdat die het effect van de contractie van de stroomlijnen beschrijft. In de serie vuistregels in de rubriek Hatsi-kD zijn de afgelopen tijd diverse vormen van de radiale weerstand volgens Ernst gegeven. Hier gebruiken we de simpele vorm van vergelijking (2).

Het (effect van het) toevoegen van de radiale weerstand

Het optellen van weerstanden is niet zonder meer mogelijk. Daarom gaan we eerst na in hoeverre het onderliggende modelconcept van Ernst aansluit bij het modelconcept van de De Lange-benadering.

Het modelconcept dat Ernst heeft gebruikt voor de afleiding van de radiale weerstand gaat uit van een volledig afgesloten, homogeen pakket met constante dikte, waarin het water vanuit oneindig wordt aangevoerd. Ernst geeft aan dat de grootste afwijking in de stijghoogte (van de constante gradiënt die bij uniforme stroming hoort) in het pakket optreedt binnen circa 2 maal de pakketdikte. Het effect van de contractie van de stroomlijnen blijft dus in dit modelconcept binnen deze afstand. In de huidige vergelijking hebben we de breedte van het oppervlaktewater verwaarloosd en zal de enige afwijking in stroming nabij het oppervlaktewater plaatsvinden over de onderrand. Uit de boven behandelde vergelijking tussen de Ernst-benadering en de G -benadering volgt dat een dichte onderrand vergelijkbaar is met constante stroming over deze rand. Zolang de beschouwde afstand ($2D$) kleiner is dan ca. λ_L is de aanname van constante stroming acceptabel. Dit betekent dat $2D < \lambda_L$ en dus dat $D < khc_1/4$. In dat geval is het modelconcept voor de radiale weerstand redelijk in overeenstemming met het modelconcept voor de De Lange-benadering en nemen we aan dat de combinatie is toegestaan.

Van der Veer (1994) geeft een oplossing die gebruikt kan worden voor het geval met variabele stroming door de onderrand. Na vereenvoudiging lijkt deze oplossing sterk op de \ln -functie van Ernst. (Ik ben nog niet aan de volledige omwerking toegekomen.) Gezien de parallel met het verschil tussen de De Lange- en de G -benadering is te verwachten dat de waarden uit de Ernst-formule hoger zullen zijn dan in het geval met variabele stroming.

Daarom is de radiale weerstand volgens Ernst naar verwachting de maximale waarde. We gaan er voorlopig van uit dat de radiale weerstand volgens (2) een redelijke benadering is die het voordeel heeft dat hij goed te doorgronden is.

Tabel 4: Afwijkingen in de verhoudingen van drainageweerstand $(c'(9) - c_1') / (c'(7) - c_1')$ voor $X_L > 3$ na toevoeging van de radiale weerstand volgens Ernst.

	$k_v = 10$	$k_v = 1$	$k_v = 0,1$
$c_0 = 10$	< 0,5%	< 1%	< 2%
$c_0 = 1$	< 1,5%	< 5%	< 10%
$c_0 = 0,1$	< 20%	< 30%	< 50%

Tabel 4 laat de gevolgen zien van het toevoegen van de radiale weerstand volgens Ernst (zie formule (2)) in de gevallen van tabel 3. We zien voor grote waarden van k_v en c_0 een lichte verslechtering van het resultaat (maar nog steeds ver binnen grenzen van het wenselijke resultaat) en voor kleine waarden van k_v en c_0 een aanzienlijke verbetering.

De vraag is nu, wanneer de radiale weerstand van belang is. Kijken we naar (8) en de formulering van de radiale weerstand in (2) dan zien we dat de term $(c_0 L/B)F_B$ zich bij variatie in L op dezelfde manier gedraagt en fysisch gezien ook vergelijkbaar is. Daarom kijken we naar de verhouding tussen deze twee termen in tabel 5.

Tabel 5: Verhoudingen van intreeweerstandsterm en radiale weerstand $(c_0 F_B/B) / (1/\pi a k \ln(D/B))$ in de situaties van tabel 4.

	$k_v = 10$	$k_v = 1$	$k_v = 0,1$
$c_0 = 10$	269	85	26,9
$c_0 = 1$	26,9	8,5	2,69
$c_0 = 0,1$	2,69	0,85	0,269

Tabel 5 geeft aan dat $w_{rad} (= 1/\pi a k \ln(D/B))$ belangrijk (en dus het quotiënt in de tabel klein) is in de gevallen waar tussen tabel 3 en 4 grote verbeteringen optreden. Voor die gevallen (rechts onder in tabel 5) bekijken we nu nog eens verder het effect van de invloed van variatie in D en B , waarbij voor k_v de variatie in k_v wordt uitgevoerd en voor c_0 de variatie in c_0 (tabel 6).

Tabel 6: Verhoudingen van intreeweerstandsterm en radiale weerstand $(c_0 F_B/B) / (1/\pi a k \ln(D/B))$ bij variatie van D en B .

$\alpha: k_v = 0,1$ en $c_0 = 1$

	$B = 10$	$B = 1$	$B = 0,1$
$D = 100$	0,04	0,21	1,43
$D = 10$	$D \leq B$	0,43	2,1
$D = 1$	$D \leq B$	$D \leq B$	4,3

Tabel 6 (vervolg)
 b: $k_v = 1$ en $c_0 = 0,1$

	B = 10	B = 1	B = 0,1
D = 100	0,02	0,07	0,45
D = 10	$D \leq B$	0,14	0,68
D = 1	$D \leq B$	$D \leq B$	0,73

c: $k_v = 0,1$ en $c_0 = 0,1$

	B = 10	B = 1	B = 0,1
D = 100	0,007	0,02	0,14
D = 10	$D \leq B$,04	0,21
D = 1	$D \leq B$	$D \leq B$	0,43

Noot: Voor $D \leq B$ geldt dat de ln-functie in de Ernst-formule voor de radiale weerstand niet meer geldig is. In die gevallen wordt in het algemeen aangenomen dat de radiale weerstand dan verwaarloosbaar is. Hierop gaan we nu niet verder in.

Uit tabel 6 blijkt duidelijk dat de radiale weerstand belangrijk wordt in gevallen dat k_v en c_0 klein worden en D groter is dan B . Dit is representatief voor gevallen met $L/2\lambda_L > 3$ en dus bijvoorbeeld in gebieden met een gelaagd topsysteem boven een niet zo sterk scheidende laag.

Kijken we nu hoe de toevoeging van de radiale weerstand uitpakt op de drainageweerstand (figuur 5 en 6), dan zien we dat hiermee toch nog niet echt aan het gedrag van de 2-d oplossing wordt tegemoet gekomen. De afwijkingen in de verhoudingen worden wel kleiner maar het effect van de toevoeging van de radiale weerstand lijkt eerder op een verschuiving dan op het dichter naar de 2-d oplossing toekomen. Het verschil tussen de 2-d en 1-d benadering wordt dus niet echt goed door de radiale weerstand gegeneerd. Verder onderzoek naar de juiste formulering is aan te bevelen.

Tot slot gaan we hieronder weer terug naar de voedingsweerstand. Hieronder geven we de afwijkingen in de verhoudingen na toevoeging van de term voor de radiale weerstand.

Tabel 7: Afwijkingen in de verhoudingen van voedingsweerstand $c^*(9)/c^*(7)$ voor $X_L > 3$, na toevoeging van de radiale weerstand.

	$k_v 3$	$k_v 1$	$k_v 3$
$c_0 = 10$	< 1%	< 1%	< 1%
$c_0 = 1$	< 3%	< 2%	< 7%
$c_0 = 0,1$	< 6%	< 2%	< 15%

Hoewel sommige kleine waarden groter zijn geworden ten opzichte van die in tabel 2, kan geconcludeerd worden dat de De Lange-benadering met de toevoeging van de Ernst-term voor de radiale weerstand resultaten geeft die voor de praktijk net zo nauwkeurig zijn als die van de Bruggeman-benadering. Het inzicht in de bijdrage van de verschillende parame-

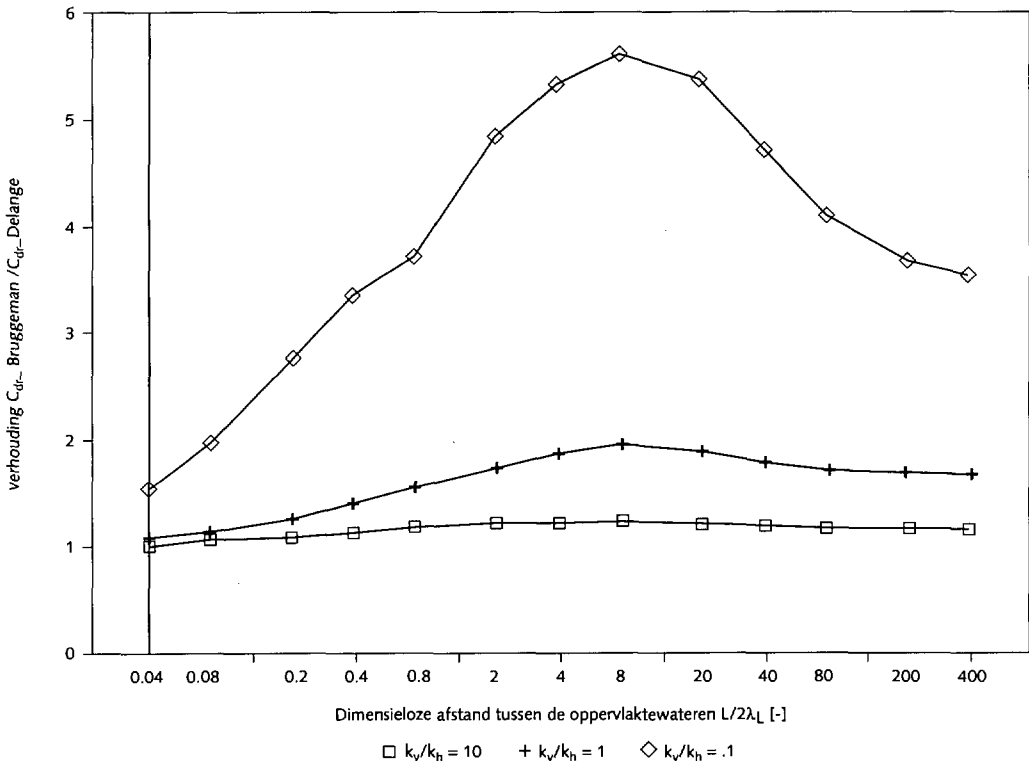
ters en termen in de De Lange-benadering is echter aanzienlijk groter. Deze benadering kan eenvoudig in een GIS worden ingebouwd (MONA, Vermulst e.a., 1997).

Het gebruik in de praktijk

a *Het gebruik van de verschillende formuleringen voor de voedingsweerstand*

Voor het gebruik van de Cauchy-randvoorwaarde voor zowel de voedingsweerstand als de drainageweerstand zijn de Bruggeman-benadering en de G -benadering (de De Lange-benadering) de best mogelijke mits c^* gebruikt wordt in combinatie met p^* . De Bruggeman-benadering is minder nauwkeurig voor brede oppervlaktewateren ($B > \lambda_B$), de De Lange-benadering inclusief toevoeging van de radiale weerstand is minder nauwkeurig voor gevallen waarin relevante anisotropie aanwezig is en het watervoerend pakket relatief dik is ten opzichte van de breedte van het oppervlaktewater (en de afstand tussen de oppervlaktewateren relatief groot is, $L > \lambda_L$).

Het gebruik van zowel de klassieke Ernst-benadering als de G -benadering is alleen juist voor waarden van $L < \lambda_L$ en $B < \lambda_B$, dus zolang de stroming over de onderrand weinig vari-

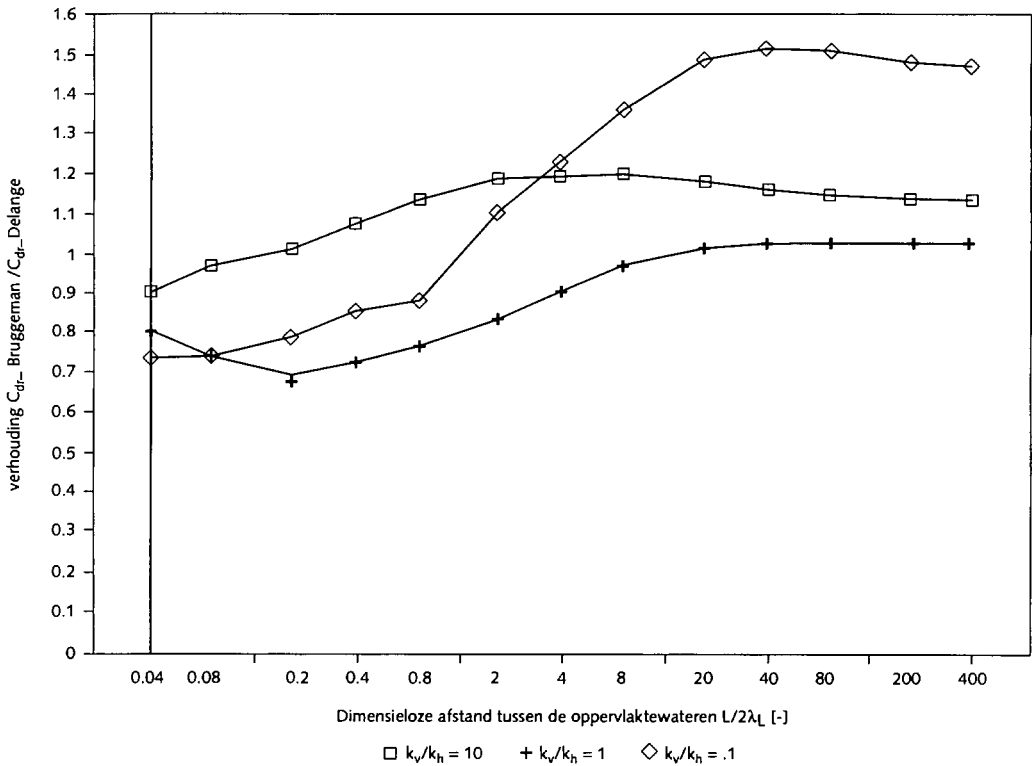


Figuur 5: Verhouding drainageweerstand $c_{\text{drain-De Lange}} / c_{\text{drain-Bruggeman}}$ voor $c_0 = 0,1$ en zonder toevoeging van radiale weerstand.

eert. Buiten deze grenzen worden altijd te hoge weerstanden en dus te lage fluxen berekend (zie ook Van Drecht 1997, tabel 2).

b Het belang van p^ bij het gebruik van de voedingsweerstand*

Het gebruik van p in plaats van p^* kan tot verkeerde modelresultaten leiden. Als rekenvoorbeeld geven we een gebied met diepe kwel (s) van 0,5 mm/dag, een netto grondwateraanvulling (P_n) 0,5 mm/dag, een drainageweerstand (c_{drain}) van 300 dagen, een weerstand van de scheidend laag (c_l) van 300 dagen en een verschil tussen stijghoogte ($\phi =$ referentieniveau) en oppervlaktewaterpeil (p) van 0,45 meter. We krijgen dan $p = -0,45$ meter en $p^* = -0,45 + 0,0005 \cdot 300 = -0,30$ meter. Bij gebruik van p in plaats van p^* zal de voedingsweerstand (nu $300 + 300 = 600$ dagen) in het model verhoogd moeten worden tot $((\phi - p)/s) = 0,45/0,0005 = 900$ dagen. Dit betekent dus dat bijvoorbeeld c_0 of een van de andere parameters die minder goed bekend is met 50% omhoog geschroefd wordt op basis van een verkeerd modelconcept.



Figuur 6: Verhouding drainageweerstand c_{drain} -De Lange / c_{drain} -Bruggeman voor $c_0 = 0,1$ en met toevoeging van radiale weerstand.

c *Het belang van p_{drain} bij het gebruik van de drainageweerstand*

Meestal is het verschil in resultaten tussen het gebruik van p_{drain} en p verwaarloosbaar. In het bovenstaande voorbeeld geldt $h_{\text{gem}} = 0,15$ meter ($= s * c_{\text{drain}}$) en dus $h_{\text{gem}} - p = 0,30$ m, terwijl het verschil $p_{\text{drain}} - p$ slechts 5 mm ($= P_n * c_0$, $c_0 = 1$ dag) bedraagt. In gevallen met relatief hoge c_0 kan echter het verschil relevant worden: Neem bijvoorbeeld $c_0 = 10$ dagen in bovenstaand geval dan wordt $P_n c_0$ gelijk aan 5 cm.

Een ander voorbeeld is met een breed infiltrerend kanaal met hoge weerstand ($B = 50$ meter, $c_0 = 1000$ dagen) in een gebied met infiltratie $P_n = 1$ mm/dag. In dergelijke gebieden zijn echter c^* en c_{drain} ook heel groot ($L = 5000$ meter, $c_1 = 100$ dagen, $kH = 100$ m²/d $\Rightarrow \lambda_B = 100$ meter $\Rightarrow c_{\text{drain}} = c^* = 10e5$) en worden q en s dus volledig ongevoelig voor de term $P_n c_0$.

d *Het gebruik van de Bruggeman- en de De Lange-benadering voor $L \geq 3\lambda_L$*

De aanname van constante stijghoogte in het onderliggende watervoerende pakket beperkt niet de bruikbaarheid van de hierop gebaseerde methodes. Hetzelfde geldt eigenlijk ook voor de constante dikte van het freatisch pakket. (Oplossingen met variërende dikte zijn beschreven in Bear (1979, pag 181–183) maar daarin komen moeilijke elliptische integralen voor.)

Het systeem beschrijft dat de stroming over de scheidende laag varieert volgens het verschil tussen de grondwaterstand en de stijghoogte. Zolang ter plaatse van het oppervlaktewater (dus bijvoorbeeld voor $L < 3\lambda_L$) de stijghoogte relatief constant is ten opzichte van de grondwaterstand wordt de variatie in de stroming juist beschreven. In feite hebben we het dan over de term $(p - \phi)/c^*$ in de formule van de voedingsweerstand, die het aandeel van de stroming uit het oppervlaktewater in de flux s beschrijft.

Op afstanden groter dan $3\lambda_L$ is het verschil tussen de grondwaterstand en de stijghoogte nauwelijks meer van invloed op de stroming van of naar het oppervlaktewater. De stroming naar het oppervlaktewater wordt dus niet meer beïnvloed door de stijghoogte op grote afstand. Daar is de netto grondwateraanvulling bepalend voor de grondwaterstroming. Dat gebied wordt dus vooral beschreven met de term $P_n * c_{\text{drain}}/c^*$ in de formule voor de voedingsweerstand. Deze term geeft het aandeel van de netto grondwateraanvulling in de flux s aan.

De voedingsweerstand is de maat, waarmee de flux s verandert op een verandering in de stijghoogte (zie de basisuitdrukking van de Cauchy-randvoorwaarde). Deze fluxverandering is gelijk aan de verandering van de flux q van of naar het oppervlaktewater. Deze flux verandert niet meer bij toename van L als $L > 3\lambda_L$ (zie deel 1 vergelijking (17) waarin $+\phi$ in de teller moet worden toegevoegd). Omdat de flux q dus alleen wordt beïnvloed door de situatie in de directe omgeving van het oppervlaktewater is het voor de geldigheid van de benadering alleen van belang dat in dat gebied de stijghoogte relatief constant is ten opzichte van de grondwaterstand en dat de dikte van het pakket daar niet te veel varieert.

e Omgaan met niet-parallelle oppervlaktewateren

In hoofdstuk 7 van mijn proefschrift wordt uitgebreid ingegaan op het werken met niet-parallelle oppervlaktewateren. In hoofdlijn komt de methode erop neer dat per type oppervlaktewater de drainagedichtheid kan worden genomen in een gebied waarin meerdere oppervlaktewateren aanwezig zijn. Het oppervlak van het beschouwde gebied gedeeld door de drainagedichtheid is meestal een goede maat voor de gemiddelde afstand tussen de oppervlaktewateren voor gebruik in de hier gepresenteerde methode. Hierop kom ik in het derde artikel terug.

f Omstandigheden waarin oppervlaktewateren niet mogen worden gelumpt

In NAGROM wordt de regel gehanteerd dat oppervlaktewateren die een duidelijke waterscheidende werking hebben niet mogen worden gelumpt. De hoeveelheid water die van of naar dergelijke wateren gaat is relevant ten opzichte van de flux in het watervoerend pakket, terwijl de aanname van constante stijghoogte dan ook niet meer echt op gaat.

g Wanneer voorkeur voor drainageweerstand of voedingsweerstand

Op het gevaar af om mijn vingers te branden, toch een mening over het gebruik van drainageweerstand en voedingsweerstand. In principe is er als het oppervlaktewater gelumpt wordt, geen reden om het freatisch pakket op te nemen in een regionaal model van het verzadigde grondwater. Bij samengestelde (combinatie van primaire, secundaire en tertiaire) drainagesystemen kan het gebruik van drainageweerstand het voordeel opleveren van doorzichtigheid, maar in principe kan ook dat in de vorm van voedingsweerstand worden uitgedrukt.

Nawoord

In het vorige nummer van STROMINGEN stond voorafgaand aan het eerste deel van deze reeks een artikel van Gerard van Drecht over hetzelfde onderwerp. Het toont aan dat het onderwerp weer in een hernieuwde belangstelling is komen te staan, mede naar aanleiding van mijn proefschrift. De oplossing voor de voedingsweerstand die Van Drecht af leidt en Ernst* noemt is sterk gerelateerd met de F_L -term (variabele stroming over de onderrand) net als de oorspronkelijke Ernst-oplossing gerelateerd is met de G_L -term. Het grootste verschil tussen de oplossing van Van Drecht en de hier gepresenteerde formules is dat in zijn geval het effect van (de bodemweerstand van) de sloot niet rechtstreeks is opgenomen, maar via optelling van volgens de boven beschreven Ernst-methode.

Ik dank Jan van Bakel en Eric Querner voor de verhelderende discussies over de betekenis van de radiale weerstand.

Lijst van symbolen

a	=	anisotropie-factor $\sqrt{k_v/k_h}$ [-]
B	=	breedte van het oppervlaktewater [L]
c_0	=	weerstand van de bodem van het oppervlaktewater [T]
c_1	=	weerstand van de scheidende laag [T]
c_1'	=	weerstand van de scheidende laag in combinatie met verticale weerstand binnen watervoerend pakket [T]
c^*	=	voedingsweerstand [T]
c_{drain}	=	drainageweerstand [T]
c_{hor}	=	weerstand tegen horizontale stroming volgens Ernst [T]
c_{int}	=	intrede-weerstand volgens Ernst [T]
c_{rad}	=	weerstand tegen radiale stroming volgens Ernst [T]
c_{sch}	=	weerstand van de scheidende laag volgens Ernst (= c_1) [T]
c_{vert}	=	weerstand tegen verticale stroming volgens Ernst [T]
h	=	grondwaterstand in het watervoerend pakket in het topsysteem [L]
h_{gem}	=	gemiddelde van h over $-B/2 \leq x \leq L/2$ [L]
H	=	representatieve dikte van het watervoerend pakket in het topsysteem [L]
k_h	=	horizontale doorlatendheid van het watervoerend pakket in het topsysteem [L / T]
k_v	=	verticale doorlatendheid van het watervoerend pakket in het topsysteem [L / T]
L	=	afstand tussen de oppervlaktewateren [L]
p	=	oppervlaktewaterpeil [L]
p^*	=	gemodificeerde oppervlaktewaterpeil behorend bij c^* [L]
p_{drain}	=	gemodificeerde oppervlaktewaterpeil behorend bij c_{drain} [L]
P_n	=	grondwateraanvulling [L / T]
Q_0	=	totale flux door watervoerend pakket op $x = 0$ [L ² / T]
s	=	flux (volume per oppervlakte per tijd) [L / T]
ϕ	=	(constante) stijghoogte in het regionale watervoerend pakket [L]
λ_B	=	$\sqrt{[k_{0,x}H_0c_1'c_0/(c_1' + c_0)]}$ = spreidingslengte behorend bij $-B/2 \leq x \leq 0$ [L]
λ_L	=	$\sqrt{[c_1'k_{0,x}H_0]}$ = spreidingslengte behorend bij $0 \leq x \leq L/2$ [L]

Literatuur

- Bear, J. (1979)** *Hydraulics of Groundwater*; McGraw-Hill, New York.
- Drecht, G. van (1997)** Modellen voor diffuse ontwatering in de toplaag; in: STROMINGEN, jrg 3, nr 2, pag 5–16.
- Ernst, L.F. (1962)** Grondwaterstromingen in de verzadigde zone en hun berekening bij aanwezigheid van horizontale evenwijdige open leidingen; in: *Versl. Landbouwk Onderz.* 67.15, Pudoc, Wageningen.
- Ernst, L.F. (1978)** Drainage of undulating sandy soils with high groundwater tables; in: *Journal of Hydrology*, jrg 39, nr 1/2, pag 1–50.

- Ernst, L.F. (1983)** Wegzijing en kwel; de grondwaterstroming van hogere naar lagere gebieden; Rapport 7, ICW, Wageningen.
- Lange, W.J. de (1996)** Groundwater modeling of large domains with analytic elements; proefschrift, TU-Delft, ook RIZA nota 96.028.
- Lange, W.J. de (1997)** Nieuwe inzichten in het gebruik van voedingsweerstand of drainageweerstand in de randvoorwaarde van een grondwatermodel. Deel 1: De basis voor het modelconcept; in: *STROMINGEN* jrg 3, nr 2.
- Veer, P. van der (1994)** Exact solutions for two-dimensional groundwater flow in a semi-confined aquifer; *Journal of Hydrology*, nr 156, pag 91–99.
- Vermulst, J.A.P.H., J. Hoogeveen en W.J. de Lange (1997)** MONA, An analytic-based interface for the connection between the Dutch nationwide model for the unsaturated and saturated flow; gepresenteerd op de conferentie Analytic-based modeling of groundwater flow, Nunspeet, RIZA, Lelystad.