Nieuwe inzichten in het gebruik van voedingsweerstand of drainage-weerstand in de randvoorwaarde van een grondwatermodel

Deel 1: De basis voor het modelconcept

Wim de Lange

Inleiding

De drainageweerstand werd al ver voor de tijd van computer modellen gebruikt voor de dimensionering van drainagemiddelen (Hooghoudt 1940; Dagan 1964). Daarbij werd uitgegaan van een enkel watervoerend pakket, dat in sommige gevallen gelaagd kon zijn (Ernst, 1961), met netto grondwater aanvulling en een enkel type van drainage waarvan werd aangenomen dat die ongeveer evenwijdig kon worden aangelegd. Later heeft Ernst (1978) de theorie uitgebreid voor combinaties van meerdere types drainagemiddelen (verschillende grootten oppervlaktewateren). Aan het begin van het gebruik van computermodellen lag het voor de hand om dit concept van het topsysteem te gebruiken om drainagesystemen te vertalen in de bovenrand van de modellen. Analoog aan het modelleren van meren, grote rivieren en kanalen vertaald in een peil en een weerstand, werd de drainageweerstand en het peil in de drainagemiddelen gebruikt in het geval van drainagesystemen. Later werd ook de voedingsweerstand geïntroduceerd, waardoor het topsysteem zelf niet meer met een watervoerend pakket in het model hoefde te worden opgenomen.

In de praktijk worden voor het berekenen van drainageweerstand en voedingsweerstand de formules van Ernst (1961) en van Bruggeman (1972) door elkaar gebruikt. De formule van Ernst heeft het voordeel van inzichtelijkheid, de formule van Bruggeman wordt algemeen beschouwd als meer nauwkeurig (mede omdat 2-dimensionale in plaats van 1-dimensionale stroming wordt meegenomen).

Echter zowel Ernst als Bruggeman hebben nooit formules afgeleid in de vorm van een bovenrandvoorwaarde in een computermodel met drainageweerstanden of voedingsweerstanden. Dat is in de loop der tijd gebeurd door diverse praktisch ingestelde hydrologen. Daarbij blijken enkele belangrijke onjuistheden in het gebruik geslopen te zijn. In het tweede van deze serie artikelen komt de formele afleiding van de bovenrandvoorwaarde zowel op basis van de formule van Bruggeman als van het modelconcept van Ernst aan de orde.

Wim J. de Lange is werkzaam bij het RIZA, Postbus 17, 8200 AA Lelystad, telefoon: (0320) 29 87 38, e-mail w.dlange@riza.rws.minvenw.nl

De afgelopen jaren is bij RIZA intensief gewerkt aan de ontwikkeling van een systeem waarmee inzichtelijk en op basis van landsdekkende informatie de interaktie tussen oppervlaktewater en grondwater in model gebracht kan worden. Dit systeem (MONA) wordt zowel voor het model voor de onverzadigde zone MOZART (Arnold, 1996) als voor het model voor de verzadigde zone NAGROM (De Lange, 1991) gebruikt. Het systeem is gebaseerd op een nieuwe, formeel-afgeleide randvoorwaarde (De Lange, 1996), waarmee de interaktie tussen oppervlaktewater en grondwater wordt gemodelleerd. Door het gebruik in het koppelingssysteem MONA (Vermulst e.a., 1997) is zowel de drainageweerstand (MOZART) als de voedingsweerstand (NAGROM) belangrijk en moest ook de relatie tussen beiden wiskundig afgeleid worden. Voor MONA zijn daarnaast verschalingsregels afgeleid omdat de celgroote van MOZART verschilt van de elementgrootte van NAGROM (Vermulst e.a, 1997).

Het is de bedoeling de inzichten uit de theoretische analyse en de praktijk met MONA in drie artikelen in STROMINGEN te gaan presenteren. In dit artikel zal de basis van het modelconcept worden uitgelegd. In het tweede artikel gaan we de praktijk ervan vergelijken met bestaande modelleerpraktijken (met natuurlijk de formules van Ernst (1961) en Bruggeman (1972). In het derde artikel gaan we in op de procedure van het bepalen van de parameterwaarden, waarbij ook voorwaarden voor het gebruik van numerieke modellen afgeleid worden. We richten ons daarbij vooral op het begrip van het modelleren van stationaire grondwater stroming in het topsysteem (het grondwater systeem boven het eerste regionale watervoerende pakket).

Definities

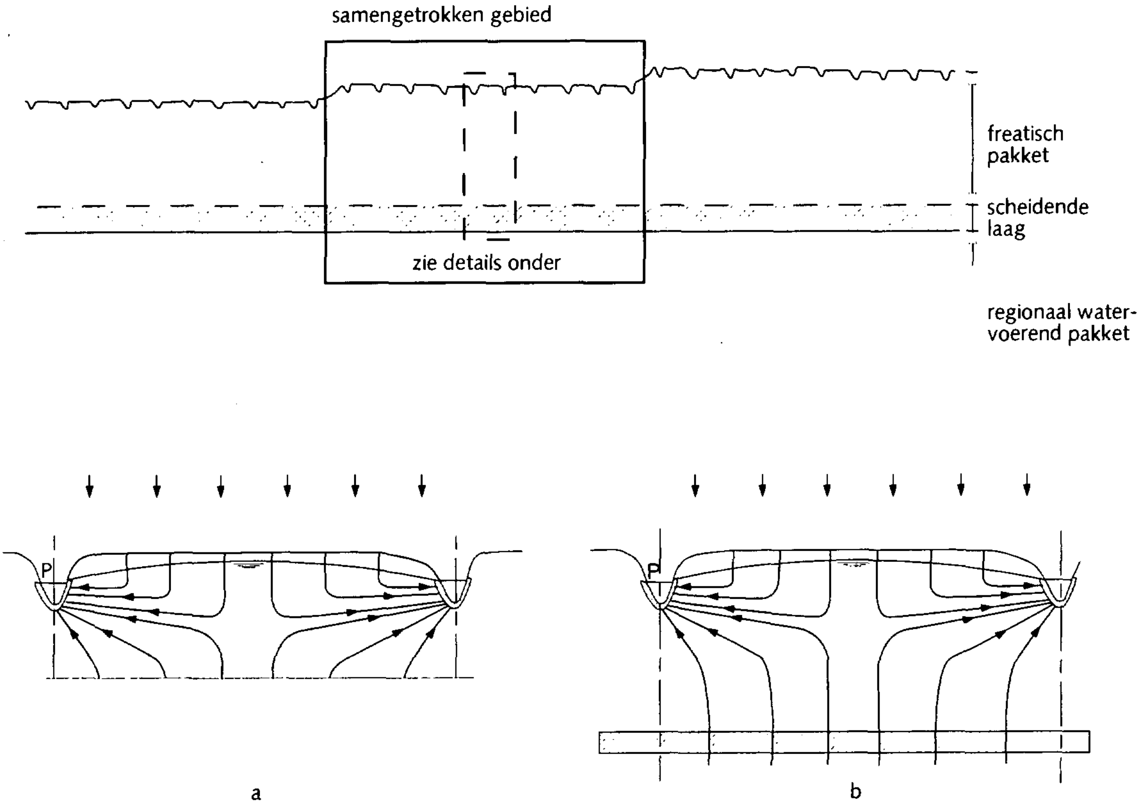
Een randvoorwaarde (voor bijvoorbeeld een computermodel) waarin zowel een peil als een weerstand wordt toegekend, wordt een Cauchy randvoorwaarde genoemd. Formeel is een Cauchy randvoorwaarde een lineaire relatie tussen de potentiaal (stijghoogte) op een rand en zijn afgeleide (en die is met Darcy's vergelijking direct gerelateerd aan de stroming) over die rand. Het bekendste voorbeeld in grondwater hiervan is:

$$s = (p - \phi)/c \qquad (1)$$

Alle symbolen in dit artikel worden verklaard in de symbolenlijst aan het eind. Deze vergelijking geldt voor een meertje, grote rivier of kanaal. Randvoorwaarde (1) vormt in feite de basis voor het modelleren van de interaktie tussen de drainagemiddelen en/of de oppervlaktewateren in het topsysteem en het grondwater eronder (figuur 1 boven). De kern van dit artikel gaat over het formeel wiskundig afleiden van de waarden van de constanten p en c in vergelijking (1). Daarbij moeten natuurlijk aannamen en keuzen worden gedaan.

Voordat we ingaan op de afleidingen is het goed om nog eens de voedingsweerstand en drainageweerstand te definiëren.

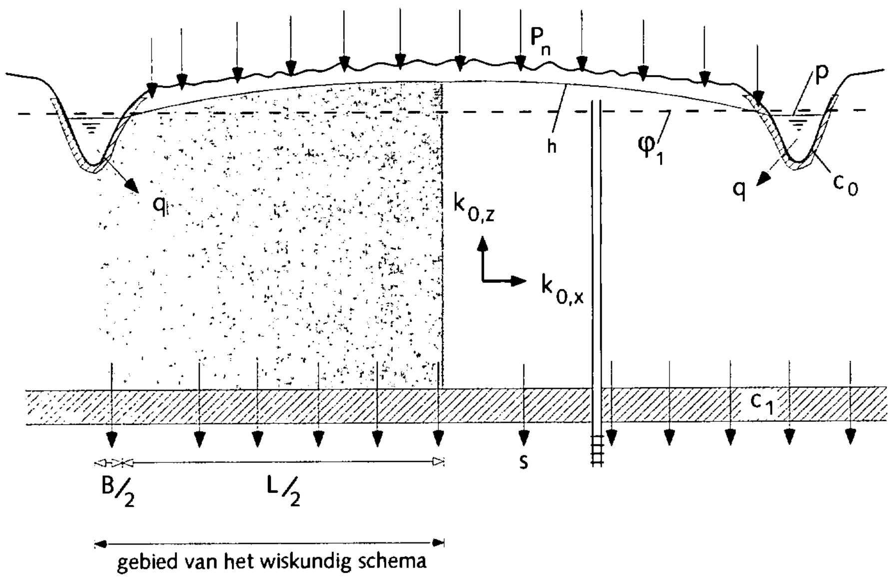
De drainageweerstand wordt vaak (bijv. Van Bakel, 1986, p30) geïnterpreteerd als zijnde de weerstand die het neerslagoverschot (beter: de grondwater aanvulling) ondervindt (binnen het topsysteem) vanaf het freatisch vlak tot aan de waterlopen. Dit is juist zolang het in de kontekst van het dimensioneren van drainagemiddelen wordt gebruikt of zolang een enkel watervoerend pakket wordt beschouwd. Voor het gebruik in de vertaling van het

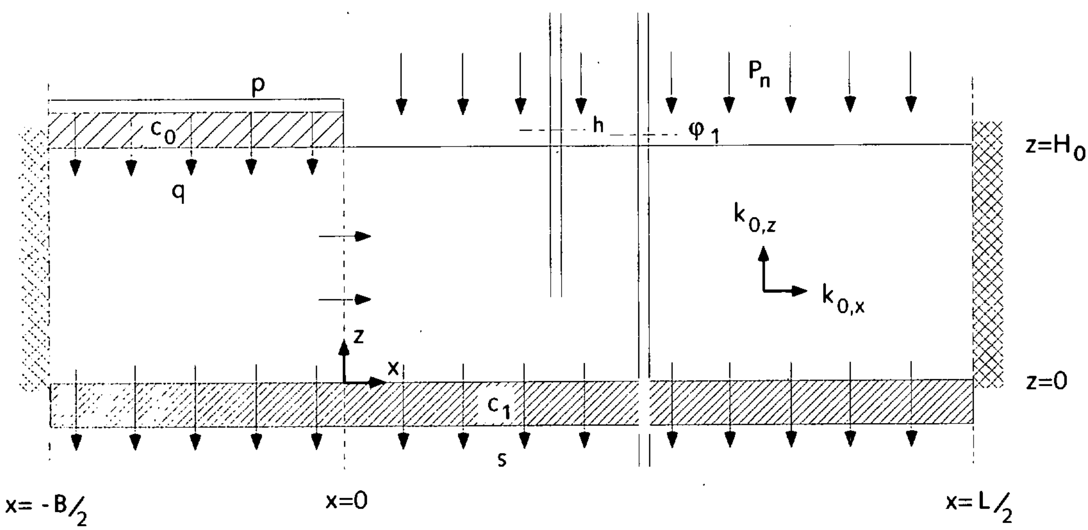


Figuur 1: Topsysteem-schematisatie voor het geval met drainageweerstanden (a) en met voedingsweerstand (b).

topsysteem naar een bovenrandvoorwaarde van een regionaal grondwater model is deze omschrijving te beperkt. Zo'n randvoorwaarde sluit altijd het effect van de stroming van of naar het onderliggend pakket in. Beter dan bovengenoemde interpretatie is het om in plaats van de grondwateraanvulling de flux naar het oppervlaktewater in beschouwing te nemen (zie ook Ernst, 1978, p17). In dit artikel zal deze beschrijving dan ook gebruikt gaan worden (figuur 1a).

De voedingsweerstand omvat alle weerstand tussen de drainagemiddelen en waterlopen en de top van het bovenste regionale watervoerend pakket (figuur 1b).





Figuur 2: Conceptueel (a) en wiskundig (b) model voor de afleiding van de Cauchy randvoorwaarde.

Afleidingen van formules voor de constanten p en c in vergelijking (1)

Aannamen en keuzen

Voor de afleiding van de 'modelrandvoorwaarde' gebruiken we de modellen in figuur 2. Het conceptuele model omvat het gebied tussen de middens van twee oppervlakte wateren. Door het aannemen van symmetrie in de stroming kan het wiskundige model vereenvoudigd worden tot figuur 2b.

Bovenop het watervoerende pakket van het topsysteem zijn het oppervlaktewater — links van x=0 — en grondwater aanvulling — rechts van x=0 — gedefinieerd, waarbij x=0 ligt op de grens van het oppervlaktewater (figuur 2). Een waterscheiding is aangenomen midden onder het oppervlaktewater en halverwege twee oppervlaktewateren. Daarbij wordt verondersteld dat de oppervlaktewateren (hoofdzakelijk) parallel aan elkaar zijn. Voor de dikte van het watervoerende pakket van het topsysteem wordt de dikte naast het oppervlaktewater aangenomen. Deze beide laatste aannamen zullen in het tweede artikel worden beschouwd op hun effect op het eindresultaat.

De stroming binnen het watervoerende pakket wordt vereenvoudigd volgens de Dupuit-Forchheimer benadering, dat wil zeggen constante stijghoogte over de vertikaal binnen het watervoerendpakket. De weerstand tegen vertikale stroming binnen het watervoerende pakket wordt opgeteld bij de weerstand van de onderliggende scheidende laag.

$$c_1' = c_1 + H/k_v \qquad (2)$$

In de onderstaande afleiding wordt geen gebruik gemaakt van een benadering voor de radiale weerstand. Ook daarop komen we in het tweede artikel terug.

Een randvoorwaarde met een constante verticale flux over de onderlaag kan tot relevant andere resultaten (waaronder de waarde van voedingsweerstand en drainageweerstand) leiden dan een onderrandvoorwaarde met constante stijghoogte in het onderliggende regionale watervoerende pakket. Daarom worden beide gevallen behandeld.

De modelrandvoorwaarde (1) wordt in eerste instantie uitgewerkt voor de voedingsweerstand en afgeleid voor het geval (I) met constante stijghoogte in het onderliggende regionale watervoerende pakket. Daarna wordt dezelfde onderrandvoorwaarde gebruikt voor een uitdrukking met de drainageweerstand (II). In laatste instantie wordt bij een constante flux op de onderrand een uitdrukking met de voedingsweerstand bepaald (III). Dit doen we met name om later verschillen en overeenkomsten met reeds bekende drainageformules te kunnen aangeven.

I Afleiding van randvoorwaarde met voedingsweerstand in het geval met constante stijghoogte op de onderrand

Eerst presenteren we de differentiaalvergelijkingen (een voor het deel onder het oppervlaktewater en een voor het deel met grondwateraanvulling).

$$kH\frac{d^2h}{dx^2}-\frac{h-f}{c_1'}-\frac{h-p}{c_0}=0 \qquad -B/2 \le x \le 0 \qquad (3a)$$

$$kH\frac{d^2h}{dx^2}+P_n-\frac{h-f}{c_1'}=0 \qquad 0 \le x \le L/2 \qquad (3b)$$

De randvoorwaarden langs de verticale randen (flux gelijk nul) volgen uit symmetrie-overwegingen.

$$\frac{dh}{dx}=0 \qquad \text{op } x = -B/2 \text{ en op } x = L/2 \qquad (4a)$$

Op de grens van het oppervlaktewater (x=0) worden beide differentiaalvergelijkingen gekoppeld door uit te gaan van continuïteit in stroming en grondwaterstand.

$$\frac{dh_{links}}{dx}=\frac{dh_{rechts}}{dx} \text{ en } h_{links}=h_{rechts} \qquad \text{op } x = 0 \qquad (4b)$$

Zoals met een understatement dan gezegd wordt: 'na enig uitwerken' volgt dan de oplossing in termen van de grondwaterstand h (voor geïnteresseerden bij de schrijver opvraagbaar). Daarna kan de Cauchy randvoorwaarde (1) op basis van de voedingsweerstand (c^*) afgeleid worden. Het topsysteem wordt daarmee vervat in de bovenrandvoorwaarde van het grondwatermodel.

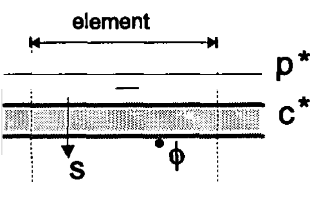
Voor het grondwatermodel zijn de variabelen de stijghoogte in het bovenste watervoerend pakket ϕ en de flux naar of van het topsysteem s_{gem} gemiddeld over het gebied tussen de twee waterscheidingen (figuur 2). Deze gemiddelde flux kan worden bepaald uit het verschil tussen de gemiddelde grondwaterstand (h_{gem}) en de constante stijghoogte ϕ gedeeld door c_1'. Na de wiskundige uitwerking komen we tot de volgende Cauchy randvoorwaarde (figuur 3):

$$s_{gem} = (p^* - \phi)/c^* \qquad (5)$$

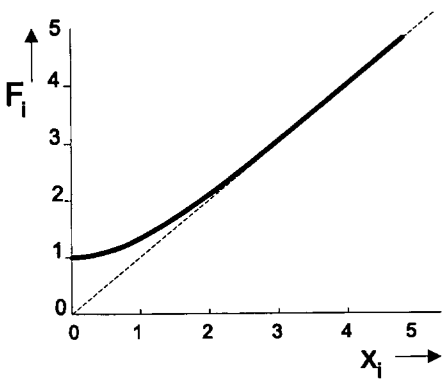
met $\quad p^* = p + P_n(c^* - c_1' - c_0) \qquad (6)$

en $\quad c^* = (c_0 + c_1')\, F_L + (c_0L/B)\, F_B \qquad (7)$

Opvallend is hier p^* (dat het gemodificeerde oppervlaktewaterpeil zal worden genoemd) op de plaats waar in (1) gewoon p staat. De waarde van p^* verschilt in niet-poldergebieden over het algemeen relevant van de waarde van p. Het gebruik van p met c^* in (1) is dan ook onjuist en kan tot onbruikbare modelresultaten leiden.



Figuur 3: Schema voor Cauchy *randvoorwaarde met voedingsweerstand.*



Figuur 4: Verloop van de functie $F_I = X_I$ ctnh (X_I).

Het symbool F_I (met I = B of L) staat voor de functie (zie figuur 4):

$$F_I = X_I \text{ ctnh } (X_I) \text{ met } X_I = l/2\lambda_I,\ I = B,L \qquad (8)$$

Hierin geldt $l_B = \sqrt{\dfrac{kHc_1'c_0}{c_1'+c_0}}$ en $l_L = \sqrt{kHc_1'}$.
De term X_B kan worden gezien als de 'slootbreedte-invloed' en de term X_L als de 'slootafstand-invloed'. De ctnh-functie (cotangens hyperbolicus) is een eenvoudige combinatie van e-machten. De functie 'X ctnh (X)' nadert 1 voor X < 1 en nadert X voor X > 3. Met kleine afwijkingen kunnen we stellen dat:

$$F_I \approx 1 + X_I - X_I/(1 + X_I) = X_I + 1/(1 + X_I) \qquad (9)$$

Het gedrag van (1) met deze relaties wordt verder behandeld in het hoofdstuk analyse.

II Afleiding van randvoorwaarde met drainageweerstand in het geval van constante stijghoogte op de onderrand

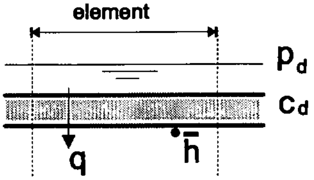
Op basis van de bovengenoemde oplossing in h kunnen we ook de Cauchy randvoorwaarde (1) herdefiniëren op basis van de drainageweerstand c_{drain} (figuur 5). Voor het grondwatermodel zijn de variabelen nu de gemiddelde grondwaterstand in het bovenste watervoerende pakket h_{gem} binnen de beschouwde cel en de flux naar of van het oppervlaktewater q (zie hoofdstuk definities). Daarmee komen we tot de volgende Cauchy-randvoorwaarde:

$$q = (p_{drain} - h_{gem})/c_{drain} \qquad (10)$$

Dan volgen uit de wiskundige afleiding de volgende formules:

$$p_{drain} = p - P_n c_0 \qquad (11)$$

$$c_{drain} = c^* - c_1' \qquad (12)$$



Figuur 5: Schema voor Cauchy randvoorwaarde met drainageweerstand.

Deze eenvoudige relatie tussen de drainageweerstand en de voedingsweerstand is al vaker gebruikt, maar bij mijn weten nooit echt wiskundig bewezen. Ook voor de Cauchy randvoorwaarde op basis van de drainageweerstand geldt dat niet het oppervlaktewaterpeil rechtstreeks gebruikt mag worden. Of de term $P_n c_0$ verwaarloosd mag worden, hangt af van de grootte ervan ten opzichte van de waarde van $(p - h_{gem})$. Vaak is $P_n c_0$ in de orde van millimeters terwijl ($p - h_{gem}$) in de orde van decimeters is. Dan mag voor p_{drain} gewoon p gebruikt worden.

III Afleiding van randvoorwaarde met voedingsweerstand in het geval van constante flux op de onderrand

Als laatste onderdeel in de afleiding geven we de oplossing voor de voedingsweerstand in het geval van constante flux naar het onderliggende watervoerende pakket. In dit geval wordt de term met $(h - \phi)/c_1'$ in de differentiaalvergelijkingen (3a) en (3b) vervangen door de constante flux s. In de Cauchy randvoorwaarde (5) verandert nu s_{gem} in s. Op soortgelijke wijze als bovenstaand komen we dan tot een oplossing die voor p* exact gelijk is aan (6) maar die voor c* luidt:

$$c^* = (c_0+c_1')\, G_L + (c_0L/B)\, G_B \tag{13}$$

waarin G_I een soortgelijke functie is als F_I en gelijk is aan:

$$G_I = 1 + X_I^2/3 \tag{14}$$

In het tweede artikel zullen we laten zien dat deze oplossing (met 12) in de kern gelijk is aan de formulering van Ernst (1961) voor de drainageweerstand.

Analyse

Uit vergelijkingen (7) – (9) zien we dat de voedingsweerstand c* voor kleine waarden van $B/2\lambda_B$ en $L/2\lambda_L$ gelijk wordt aan

$$c^* = c_0 + c_1' + c_0L/B \qquad \text{voor } B << 2\lambda_B \text{ en } L << 2\lambda_L \tag{15}$$

Dit resultaat volgt ook uit het gebruik van vergelijkingen (13) en (14). Voor kleine waarden van $B/2\lambda_B$ en grote waarden van $L/2\lambda_L$ volgt $c^* = \left(c_0 + c_1'\right)\frac{L}{2l_L} + \frac{c_0L}{B}$ en voor grote waarden van $B/2\lambda_B$ en $L/2\lambda_L$ volgt $c^* = \left(c_0 + c_1'\right)\frac{L}{2l_L} + \frac{c_0L}{B}\frac{B}{2l_B}$. Het gedrag van de drainageweerstand volgt eenvoudig door (12) te gebruiken.

Voor grote waarden van $L/2\lambda_L$ (dwz groter dan 3) is de voedingsweerstand lineair met L, dus stel c* = CL. (Dit gedrag is onafhankelijk van de waarde van de andere parameters zoals bijvoorbeeld B.) Beschouw nu de waterbalans van het gebied $x \geq 0$.

$$Q_0 = (P_n - s_{gem})L \tag{16}$$

waarin Q_0 de totale flux op x = 0 voorstelt. Gebruik nu hierin (5), (6) en c* = CL dan volgt:

$$Q_0 = \frac{P_n\left(c_1' + c_0\right) - p}{C} \qquad (17)$$

hetgeen onafhankelijk is van L. Dit betekent dat de stroming van of naar de oppervlaktewateren niet meer verandert als L verandert. Dit zou je ook verwachten omdat wat er op $x>3\lambda_L$ gebeurt geen invloed meer heeft op de stroming van of naar het oppervlaktewater (let wel: dit gaat over de stroming via het topsysteem). Iets dergelijks gebeurt natuurlijk ook als de breedte van de sloot groot wordt (dus als $B/2 > 3\lambda_B$). Dan verandert de stroming op x=0 ook niet meer en stroomt in het middendeel van het oppervlaktewater het grondwater direkt van of naar het onderliggende regionale watervoerende pakket naar boven met een snelheid van $(\phi - p)/(c_1' + c_0)$.

Kijkend naar vergelijkingen (13) en (14) wordt direkt duidelijk dat deze niet leiden tot een eindig effect op Q_0 van de vergroting van L (dus als $L/2>3\lambda_L$). In de formule (17) voor de totale flux Q_0 komt L in de noemer. En dus wordt Q_0 als maar kleiner bij toenemende L hoewel dan eigenlijk geen verandering meer zou moeten optreden. Het water wordt door de randvoorwaarde met constante stroming als het ware nog gedwongen om zich over het hele topsysteem te verdelen. Daarom wordt de voedingsweerstand afgeleid met constante flux te groot voor grote waarden L. Dezelfde analyse geldt voor grote waarden van B.

Tot slot levert combinatie van vergelijkingen (5) en (10) het volgende resultaat op:

$$s_{gem} = \frac{h_{gem} - f}{c_1'} \qquad (18)$$

hetgeen de consistentie van de beide vergelijkingen illustreert.

Discussie

- Als eerste frappante resultaat volgt uit (15) met (12) dat voor kleine waarden van $B/2\lambda_B$ en $L/2\lambda_L$ de drainageweerstand gelijk wordt aan

$$c_{drain} = c_0 + c_0 L/B \qquad \text{voor } B << 2\lambda_B \text{ en } L << \lambda_L \qquad (19)$$

  Zie hier het bewijs van de eenvoudige vuistregel dat de drainageweerstand — onder bepaalde condities — in ordegrootte gelijk is aan de slootafstand. In poldergebieden wordt meestal voldaan aan de benodigde voorwaarden en is het gebruik van de vuistregel dan ook juist.
- Het gemodificeerde oppervlaktewaterpeil p* moet vooral niet geassocieerd worden met de top van de freatische grondwaterstand midden tussen de oppervlaktewateren. Uit ervaringen met NAGROM blijkt dat de waarde van p* in Nederlandse omstandigheden meters (soms zelfs tientallen meters) boven het freatisch peil kan komen.
- We kunnen vergelijking (5) gecombineerd met (6) als volgt herschrijven:

$$s_{gem} = \frac{p - f}{c^*} + P_n \frac{c_{drain} - c_0}{c^*} \qquad (20)$$

De eerste term van het rechterlid kan worden gezien als het gedeelte van s_{gem} dat van of naar het oppervlaktewater stroomt. De tweede term kan worden geïnterpreteerd als het gedeelte van de netto grondwater aanvulling dat in het diepe watervoerende pakket infiltreert. De term c_0 in het rechterlid valt veelal weg tegen c_{drain}.

- In een poldergebied is c_1 vaak groter dan c_{drain} en geldt $c^*=c_1'$. Dan is ook is de tweede term in (20) verwaarloosbaar ten opzichte van de eerste, waardoor (20) vereenvoudigd kan worden tot $s_{gem}=(p-\phi)/c_1'$.
  In infiltratie gebieden zijn er grote afstanden tussen de oppervlaktewateren en wordt c* zeer groot. Omdat c_1' daar meestal niet groot is volgt dan met (12) dat c_{drain}/c^* de waarde van 1 zal naderen. Dan wordt s_{gem} in (20) dus gelijk aan P_n.
  In alle tussenliggende situaties (hellende gebieden) wordt met de formule (7) c* ook correct berekend. Dit geeft aan dat vergelijking (20) kan worden gebruikt in alle omstandigheden waarbij sprake is van een topsysteem boven het regionale watervoerende pakket. Daarom wordt in het koppelingssysteem MONA tussen NAGROM en MOZART deze relatie over heel Nederland toegepast en wordt geen onderscheid gemaakt in oppervlaktewater stelsels (behalve voor grote rivieren, kanalen en meren die van dezelfde ordegrootte zijn als de gebruikte elementen).

Overzichtstabel met de formules:

	Voedingsweerstand	**Drainageweerstand**
Cauchy-randvoorwaarde	$s_{gem} = \dfrac{p^* - f}{c^*}$	$q = \dfrac{p_{drain} - h_{gem}}{c_{drain}}$
Formules voor constanten indien onderrandflux variabel	$p^* = p + P_n(c^* - c_1' - c_0)$ $c^* = (c_0 + c_1')\,F_L + (c_0L/B)\,F_B$ $F_B = X_B \operatorname{ctnh}(X_B)$ $F_L = X_L \operatorname{ctnh}(X_L)$	$p_{drain} = p - P_n c_0$ $c_{drain} = c^* - c_1'$
Formules voor constanten indien onderrandflux constant	$p^* = p + P_n(c^* - c_1' - c_0)$ $c^* = (c_0 + c_1')\,G_L + (c_0L/B)\,G_B$ $G_B = 1 + X_B^2/3$ $G_L = 1 + X_L^2/3$	$p_{drain} = p - P_n c_0$ $c_{drain} = c^* - c_1'$
Algemene constanten	$X_B = B/2\lambda_B$ $X_L = L/2\lambda_L$ $l_B = \sqrt{\dfrac{k_{0,x} H_0 c_1' c_0}{c_1' + c_0}}$ $l_L = \sqrt{c_1' k_{0,x} H_0}$	

Nawoord

Voor alle afleidingen kunt u zich tot de schrijver wenden of vast even neuzen in zijn proefschrift (zie literatuurlijst). Een uitgebreide versie van deze serie artikelen (met afleidingen) zal ook worden vastgelegd in een RIZA rapport dan wel in enkele engelstalige artikelen.

Deze serie artikelen zou niet tot stand zijn gekomen zonder de intensieve discussies met mijn collega's Herbert Bos, Hank Vermulst en Jippe Hoogeveen.

Lijst van symbolen

B	=	de breedte van het oppervlaktewater [L]
c_0	=	weerstand van de bodem van het oppervlaktewater [T]
c_1	=	weerstand van de scheidende laag [T]
c_1'	=	weerstand van de scheidende laag in combinatie met verticale weerstand binnen watervoerende pakket [T]
c^*	=	voedingsweerstand [T]
c_{drain}	=	drainageweerstand
h	=	grondwaterstand in het watervoerende pakket in het topsysteem [L]
h_{gem}	=	gemiddelde van h over $-B/2 \leq x \leq L/2$ [L]
H	=	representatieve dikte van het watervoerende pakket in het topsysteem [L]
k	=	horizontale doorlatendheid van het watervoerende pakket in het topsysteem [L/T]
k_v	=	vertikale doorlatendheid van het watervoerende pakket in het topsysteem [L/T]
L	=	afstand tussen de oppervlaktewateren [L]
p	=	oppervlaktewaterpeil [L]
p^*	=	gemodificeerde oppervlaktewaterpeil behorend bij c^* [L]
p_{drain}	=	gemodificeerde oppervlaktewaterpeil behorend bij c_{drain} [L]
P_n	=	grondwater aanvulling [L/T]
Q_0	=	totale flux door watervoerende pakket op x=0 [L^2/T]
s	=	flux (volume per oppervlakte per tijd) [L/T]
ø	=	(constante) stijghoogte in het regionale watervoerende pakket [L]
λ_B	=	$l_B = \sqrt{\dfrac{k_{0,x} H_0 c_1' c_0}{c_1' + c_0}}$ = de spreidingslengte in het gebied $-B/2 \leq x \leq 0$ [L]
λ_L	=	$l_L = \sqrt{c_1' k_{0,x} H_0}$ = de spreidingslengte in het gebied $0 \leq x \leq L/2$ [L]

Literatuur

Arnold, G.E. (1996) MOZART, Een landsdekkend model voor de stroming in de onverzadigde zone, RIZA nota in voorbereiding, RIZA, Lelystad.

Bakel, P.J.T. van (1986) Planning, design and operation of surface water managment systems, a case study; proefschrift, Landbouw Universiteit Wageningen.

Bruggeman, G.A. (1972) Twee-dimensionale stroming in een semi-afgesloten watervoerend pakket, Bijlage 5 van: Onderzoek voor ontrekkingen nabij "De Groeve", RIVM, Leidschendam.

Dagan, G. (1964) Spacings of drains by an approximate method, in: *J. Irr. and Drainage Div. Proc.*; ASAE Paper 3824, pag 41–46.

Ernst, L.F. (1961) Grondwaterstromingen in de verzadigde zone en hun berekening bij aanwezigheid van horizontale even-wijdige open leidingen, Versl. Landbouwk. Onderz. 67.15, Pudoc, Wageningen.

Ernst, L.F. (1978) Drainage of undulating sandy soils with high groundwater tables; in: Journal of Hydrology 39 (1/2), pag 1–50.

Hooghoudt, S.B. (1940) Bijdragen tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van de grond, No. 7, Versl Landbouwk. Onderz. 46, pag 515–707, Pudoc, Wageningen.

Lange, W.J. de (1991) A groundwater model of the Netherlands, RIZA note 90.066, RIZA Lelystad.

Lange, W.J. de (1996) Groundwater modeling of large domains with ananlytic elements, proefschrift, TU-Delft, ook RIZA nota 96.028.

Vermulst, J.A.P.H., J. Hoogeveen en W.J. de Lange (1997) MONA, an analytic-based interface for the connection between the Dutch nationwide model for the unsaturated and saturated groundwater flow, gepresenteerd op de conferentie Analytic-based modeling of groundwater flow, Nunspeet, RIZA, Lelystad.