Verrassende uitkomsten in stromingen

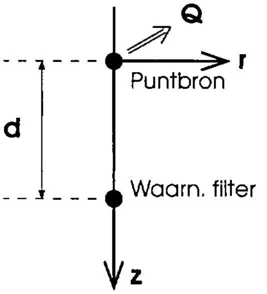
Deel 1

G.A. Bruggeman

De wiskundige theorie van de grondwaterstroming leidt nu en dan tot uitkomsten die opvallen door hun eenvoud of anderszins door hun bijzondere structuur, of ook wel omdat ze lijken te spotten met ons hydrologische gevoel. In een aantal artikelen wil ik er een paar aan de orde stellen die ik in de loop der jaren op het spoor kwam.

1

Ik zal beginnen met een min of meer bekende verrassende uitkomst. Zo'n 20 jaar geleden werden door het RID zogenaamde putproefjes gehouden, waarbij een filtertje werd gebruikt, waarvan de lengte ten naaste bij gelijk was aan de diameter, en dat daardoor als puntbron mocht worden opgevat. Bij situering van de puntbron ongeveer in het midden van een niet al te dun watervoerend pakket mag dit laatste dan bij goede benadering als oneindig dik worden beschouwd. Indien verwacht mocht worden dat het pakket anisotroop was, in die zin dat er behoorlijke verschillen bestonden tussen de horizontale en de verticale doorlatendheid, dan leek een waarnemingsfiltertje loodrecht beneden en op korte afstand van een puntbron, waaraan een constant debiet werd onttrokken, de aangewezen opstelling om de verticale doorlatendheidscoëfficiënt te bepalen (zie figuur 1).



Figuur 1

Voor isotrope grond geldt voor een puntbron in een oneindig veld:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi K \rho} \tag{1}$$

Ir. G.A. Bruggeman, Nieuwe Weteringseweg 140, 3737 ME Groenekan, telefoon: (0346) 21 30 20.

waarin

φ	=	zakking van de stijghoogte van het grondwater op een afstand ρ van de puntbron;
Q	=	onttrokken debiet;
K	=	doorlatendheidscoëfficiënt, in alle richtingen dezelfde.

De zakkingen zijn in dit geval zogenaamd bolsymmetrisch ten opzichte van de puntbron. Deze bolsymmetrie vervalt bij anisotropie en gaat over in axiale symmetrie, rond de verticale as door de locatie van de puntbron. In plaats van de ene variabele ρ ontstaan nu de variabelen r en z met $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$. De anisotropie met doorlatendheid K_h in horizontale richting en K_v in verticale richting kan in rekening worden gebracht door alle verticale afstanden in de formule voor isotrope grond met de factor $\sqrt{K_h/K_v}$ te vermenigvuldigen en K te vervangen door $\sqrt{K_h K_v}$. De formule voor de zakking wordt dan:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\sqrt{K_h K_v}\sqrt{r^2 + \frac{K_h}{K_v} z^2}} = \frac{Q}{4\pi\sqrt{K_h K_v r^2 + K_h^2 z^2}} \tag{2}$$

Voor de locatie van de waarnemingsput geldt $r = 0$ en $z = d$, zodat daar ter plaatse de zakking wordt:

$$\varphi(0, d) = \frac{Q}{4\pi K_h d} \tag{3}$$

een zeer onverwachte uitkomst, omdat hierin alleen nog maar de horizontale doorlatendheidscoëfficiënt voorkomt, terwijl de verticale is verdwenen. *Door meting van de zakking langs de verticale stroomlijn kan dus de horizontale doorlatendheid worden bepaald en niet de verticale.*

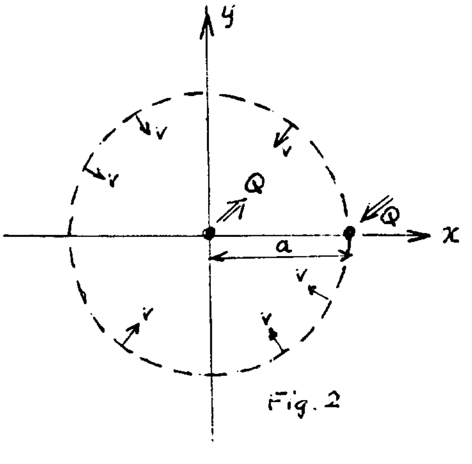
2.

We beschouwen een put en een retourput met gelijk maar tegengesteld debiet in een oneindig veld op afstand a van elkaar (zie figuur 2).

We kiezen de oorsprong ter plaatse van de onttrekkingsput en de x-as door de beide putten. Bij volkomen putten in een volkomen afgesloten pakket wordt dan de formule voor de zakking φ als functie van x en y:

$$\varphi(x, y) = \frac{Q}{4\pi KD} \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{x^2 + y^2} \tag{4}$$

In poolcoördinaten, met $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$, wordt dit:



Figuur 2

$$\varphi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi KD}\ln\frac{r^2-2ar\cos\theta+a^2}{r^2} \tag{5}$$

De snelheidscomponent in de richting van de oorsprong, dus in de richting van de onttrekkingsput, wordt:

$$v_r(r,\theta)=K\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{Q}{4\pi D}\left(\frac{2r-2a\cos\theta}{r^2-2ar\cos\theta+a^2}-\frac{2r}{r^2}\right) \tag{6}$$

of

$$v_r(r,\theta)=\frac{Q}{2\pi D}\frac{ar\cos\theta-a^2}{r^3-2ar^2\cos\theta+a^2r} \tag{7}$$

Substitueren we in deze uitkomst $r = a$, dan vinden we:

$$v_r(a,\theta)=\frac{Q}{2\pi D}\frac{a^2\cos\theta-a^2}{2a^3-2a^3\cos\theta} \tag{8}$$

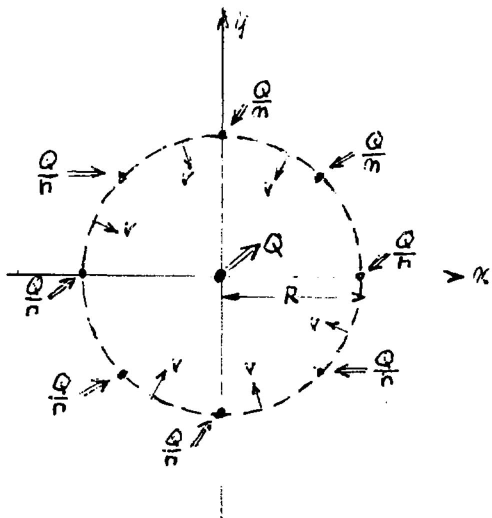
Indien $\cos\theta \neq 1$ mogen we teller en noemer door $\cos\theta - 1$ delen en vinden we:

$$v_r(a,\theta)=-\frac{Q}{4\pi aD}\quad\text{voor }\theta\neq 0 \tag{9}$$

wat wil zeggen dat op de omtrek van de cirkel met straal a en middelpunt in de oorsprong, de snelheidscomponent in de richting van de oorsprong overal even groot is (en juist gelijk aan de helft van de snelheidscomponent die daar door de onttrekkingsput wordt opgewekt), onafhankelijk van θ of K! Een uitzondering vormt de locatie van de retourput, waar $\theta = 0$.

Deze verrassende uitkomst (voor mij althans) heeft nog een behoorlijk praktische waarde, omdat een eventuele verontreiniging binnen de betreffende cirkel nooit daarbuiten kan komen. Willen we dus een vervuilde plek saneren door het vervuilde water af te pompen, zonder onaanvaardbare verlagingen in de omgeving te veroorzaken, dan doen we er een retourput bij.

Overigens geldt dit grapje ook voor meerdere retourputten, regelmatig geplaatst op de cirkelomtrek en met een totaal debiet gelijk aan het debiet van de onttrekkingsput in het middelpunt (zie figuur 3).



Figuur 3

Voor n retourputten wordt de complexe potentiaal:

$$\Omega = \frac{Q}{2\pi Dn} \ln \frac{z^n - R^n}{z^n} \tag{10}$$

waarbij $z = x + iy = r\exp(i\theta)$ en $\Omega = K\varphi + i\Psi$, met Ψ = stroomfunctie.

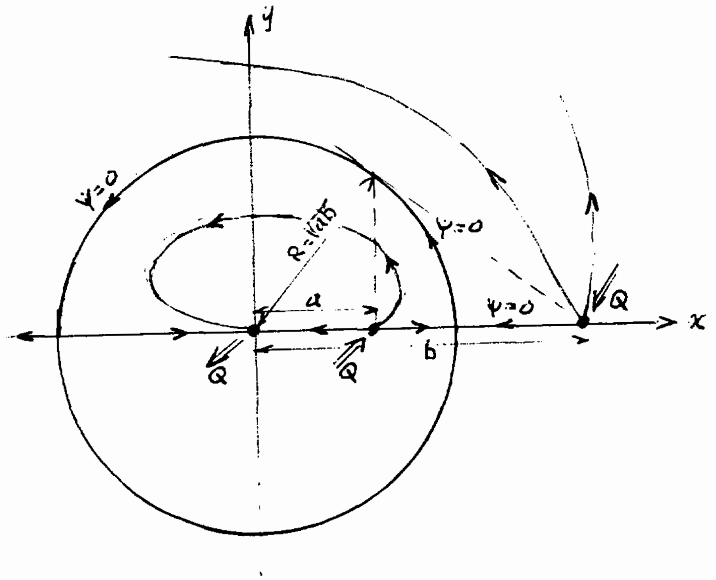
De waarde $z = r\exp(i\theta)$ ingevuld in (10) geeft de complexe potentiaal Ω in poolcoördinaten en evenzo het reële gedeelte daarvan, namelijk $K\varphi$. Differentiëren naar r geeft dan de snelheidscomponent in de richting van de onttrekkingsput voor elk willekeurig punt (r_0, θ_0) in het veld. Voor $r = R$ vinden we dan weer

$$v_r(R,\theta) = -\frac{Q}{4\pi RD} \text{ voor } \theta \neq \frac{2m\pi}{n}, \text{ m} = 0,1 \ldots, \text{n}-1 \tag{11}$$

onafhankelijk van θ en van K en zelfs van n. Reken het maar na.

3.

Een derde onverwacht resultaat krijgen we indien we bij de twee putten van figuur 2 nog een retourput met debiet Q op afstand b ($b > a$) van de oorsprong en op de x-as aanbrengen. De stroming wordt dan quasi-stationair, dat wil zeggen de stijghoogten van het grondwater worden niet-stationair, maar de snelheden stationair (zie figuur 4).



Figuur 4

Deze stroming kan worden weergegeven door de complexe potentiaalfunctie:

$$\Omega = \frac{Q}{2\pi D}\ln\frac{(z-a)(z-b)}{z}+c \tag{12}$$

waarin $c = c_1 + ic_2$ een complexe constante voorstelt, terwijl $z = x + iy$. Nu is $\Omega = K\varphi + i\Psi$, zodat

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi D}\left\{\arctan\frac{y}{x-a}+\arctan\frac{y}{x-b}-\arctan\frac{y}{x}\right\}+c_2 \tag{13}$$

Dit kan worden uitgewerkt tot

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi D}\left\{\arctan\frac{y(2x-a-b)}{(x-a)(x-b)-y^2}-\arctan\frac{y}{x}\right\} \tag{14}$$

waarbij we $c_2 = 0$ hebben gekozen, zodat de x-as ($y = 0$) de nulstroomlijn wordt. Dit vinden we ook door in (14) $\Psi = 0$ te stellen, namelijk:

$$\frac{y(2x-a-b)}{(x-a)(x-b)-y^3}=\frac{y}{x} \tag{15}$$

Behalve $y = 0$ vinden we nu echter ook

$$\frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)-y^2}=\frac{1}{x} \tag{16}$$

of

$$x(2x-a-b)=x^2-x(a+b)+ab-y^2 \tag{17}$$

waaruit

$$x^2+y^2=ab \tag{18}$$

Dit betekent dat de cirkel met straal $\sqrt{ab}$ en middelpunt de oorsprong een stroomlijn is met stroomfunctiewaarde nul! Binnen de cirkel, waarvan de straal $\sqrt{ab} > a$ is, vindt de stroming tussen de onttrekkingsput en de retourput in het punt $(a,0)$ plaats, onafhankelijk van de stroming vanuit de retourput in het punt $(b,0)$. De onttrekkingsput en de retourputten creëren dus als het ware een ondoorlatende cirkelvormige wand voor het water uit de verste retourput. De hier gegeven uitkomst (12) geldt dus ook voor stroming langs een cirkelvormige waterdichte damwand van of naar een put, mits b wordt vervangen door R^2/a, waarin R = straal van de damwand.

We kunnen deze uitkomst nog controleren door uit (12) de snelheden loodrecht op die cirkel uit te rekenen; deze moeten gelijk aan nul worden. Probeer het maar door φ in poolcoördinaten uit te drukken en dan $\partial\varphi/\partial r$ te bepalen voor $r = \sqrt{ab}$.

De volgende keer iets over onverwachte stromingen in heterogene grond.