
Eenvoudige stochastische modellen voor grondwaterstandsfluctuaties

Deel 2: Gecombineerd bodem-grondwatermodel met stochastische invoer

Marc F.P. Bierkens
Dennis J.J. Walvoort

*De modelcoëfficiënten van een tijdreeksmodel voor een grondwaterstandsreeks zijn af te leiden uit de geohydrologische parameters van het desbetreffende gebied.
(Stelling 7, proefschrift F.C. van Geer, 1987).*

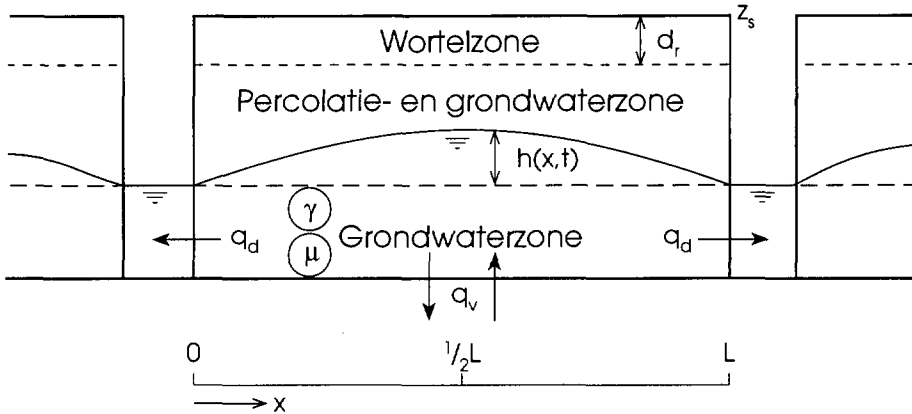
Inleiding

In het eerste artikel (Bierkens, 1998) is een eenvoudig stochastisch model geïntroduceerd om grondwaterstandsfluctuaties op een enkele locatie te beschrijven. Dit model is gebaseerd op een stochastische differentiaalvergelijking (SDV) die is afgeleid onder de veronderstelling van een evenwichtsvochtprofiel in de onverzadigde zone. Door deze veronderstelling verwachten we dat dit model met name geschikt is voor ondiepe grondwaterstanden (Gt's I-V). In dit artikel wordt een tweede stochastisch model geïntroduceerd dat ook geschikt wordt geacht voor diepere grondwaterstanden. Het model wordt verkregen door het bodemmodel van Zwamborn (1995) te koppelen aan het analytische grondwatermodel van Kraijenhoff van de Leur (1958). Net als in het eerste artikel wordt eerst het model afgeleid. Besproken wordt hoe het stochastisch model kan worden gekalibreerd. Vervolgens wordt het model toegepast op dezelfde twee locaties als de SDV in het eerste artikel. Validatiere-sultaten van het model worden vergeleken met die van de SDV, lineaire en niet-lineaire transfer-ruismodellen (Knotters en Van Walsum, 1997; Knotters en De Gooijer, 1998) en SWATRE (Belmans e.a., 1983). Tenslotte wordt aangegeven hoe de modellen die in beide artikelen zijn ontwikkeld kunnen worden gebruikt voor ruimte-tijdmodellering van grondwaterstanden.

Marc F.P. Bierkens en Dennis J.J. Walvoort zijn werkzaam bij DLO-Staring Centrum, Afdeling Landinventarisatie en -evaluatie, Postbus 125, 6700 AC Wageningen, telefoon (0317) 47 42 41, fax: (0317) 42 48 12, e-mail: bierkens@sc.dlo.nl.

Modelontwikkeling

Figuur 1 toont schematisch de modelopzet. Het bodem-grondwatersysteem wordt gesplitst in drie submodellen: de wortelzone, de percolatiezone en het grondwatersysteem. De modellen voor de wortelzone en de percolatiezone zijn ontwikkeld door Zwamborn (1995), en dat van het grondwatersysteem door Kraijenhoff van de Leur (1958).



Figuur 1: Schematische voorstelling van het bodem-grondwatermodel.

De wortelzone

De wortelzone wordt gemodelleerd als een bakje dat kan overlopen. Per discrete tijdstap wordt het geborgen volume bodemvocht berekend uit de volgende waterbalans (Zwamborn, 1995; Gehrels, 1995) (figuur 2):

$$V(t_k) = V(t_{k-1}) + [P(t_k) + q_c(t_k) - E_a(t_k) - q_p(t_k)] \Delta t \quad (1)$$

met

t_k	:	tijdstap k [T];
V	:	volume bodemvocht in de wortelzone [L];
Δt	:	duur van de tijdstap k [T];
P	:	neerslag [LT^{-1}];
E_a	:	werkelijke evapotranspiratie [LT^{-1}];
q_c	:	capillaire opstijging [LT^{-1}];
q_p	:	percolatie [LT^{-1}].

De boven- en ondergrens van het volume bodemvocht worden bepaald door respectievelijk het vochtgehalte bij veldcapaciteit en verwelkingspunt:

$$V_{\max} = d_r \theta_{fc} \quad (2)$$

$$V_{\min} = d_r \theta_{wp} \quad (3)$$

waar

- V_{\max} : maximale volume bodemvocht in de wortelzone [L];
- V_{\min} : minimale volume bodemvocht in de wortelzone [L];
- θ_{fc} : vochtgehalte bij veldcapaciteit [-];
- θ_{wp} : vochtgehalte bij verwelkingspunt [-];
- d_r : dikte wortelzone = effectieve worteldiepte (Wiersum en Reijmerink, 1990) [L].

Neerslag en referentie-evapotranspiratie volgens Makkink worden gemeten door het KNMI op een groot aantal meteostations. De werkelijke evapotranspiratie volgt uit:

$$E_a(t_k) = \alpha_s(t_k) F_c E_r(t_k) \quad (4)$$

met

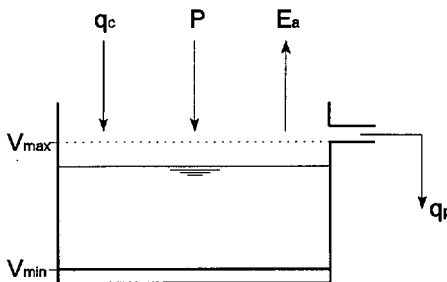
- E_r : potentiële referentie-evapotranspiratie (Makkink, 1960) [LT^{-1}];
- F_c : gewasfactor (Feddes, 1987) [-];
- α_s : reductiefunctie voor vochttekort [-].

De reductiefunctie $\alpha_s(t_k)$ lijkt sterk op die van Feddes e.a. (1978) voor transpiratie. De waarde van α_s op tijdstip t_k wordt berekend uit het evenwichtsvochtprofiel van de wortelzone en het gemiddelde vochtgehalte van de wortelzone (zie Walvoort en Bierkens (1998) voor details). Het evenwichtsvochtprofiel van de wortelzone kan worden verkregen uit laboratoriumbepalingen of uit de Staringreeks (Wösten e.a., 1994).

Het oorspronkelijke model van Zwamborn (1995) was bedoeld om grondwateraanvulling te berekenen voor diepe grondwaterstanden. Ze heeft dan ook geen rekening gehouden met capillaire opstijging. Gehrels (1995) heeft het model als volgt uitgebreid met een capillaire opstijgingsterm: Capillaire opstijging op tijdstip t_k treedt op als

$$V(t_{k-1}) + [P(T_k) - E_a(t_k)] \Delta t < V_{\max} \quad (5)$$

De grootte van de capillaire flux hangt af van de diepte van de grondwaterspiegel. Gehrels (1995) veronderstelt een lineair verband tussen deze diepte en de grootte van de capillaire



Figuur 2: Waterbalans van de wortelzone

flux. Wij hebben dit verband gemodelleerd met een sigmoïde (S-vormige) functie zodat de capillaire opstijging asymptotisch naar 0 gaat voor diepere grondwaterspiegels. Deze functie wordt gegeven in Walvoort en Bierkens (1998).

In het geval dat

$$V(t_{k-1}) + [P(t_k) - E_a(t_k)] \Delta t > V_{\max} \quad (6)$$

is er op tijdstip t_k sprake van percolatie van bodemvocht naar de grondwaterzone. De grootte van de percolatieflux aan de onderzijde van de wortelzone is gelijk aan:

$$q_p(t_k) = \frac{V(t_{k-1}) + [P(t_k) - E_a(t_k)] \Delta t - V_{\max}}{\Delta t} \quad (7)$$

De percolatiezone

Bij ondiepe grondwaterstanden wordt het percolatiewater zonder al te veel vertraging als grondwateraanvulling toegevoegd aan het grondwatersysteem. We kunnen in dat geval de grondwateraanvulling zonder veel bezwaar gelijk stellen aan de percolatieflux. Bij diepe grondwaterstanden met een dikke onverzadigde zone kan het echter een lange tijd duren voordat het percolatiewater uit de wortelzone het grondwater bereikt. Hierbij treedt vertraging en demping op, welke groter zijn naarmate de percolatiezone (tussen de onderkant van de wortelzone en het grondwater) dikker is. De onverzadigde stroming door de percolatiezone wordt beschreven door Richards' vergelijking. In het model van Zwamborn (1995) wordt deze echter niet opgelost. In plaats daarvan worden de demping en vertraging beschreven als:

$$q_g(t_k) = \sum_{i=1}^k q_p(t_i) U_p(\Delta t, t_{k-(i-1)}) \quad (8)$$

met

q_g	:	grondwateraanvulling [LT ⁻¹];
q_p	:	percolatie aan de onderzijde van de wortelzone [LT ⁻¹];
$U_p(\Delta t, t)$:	pulsrespons van de percolatiezone [-].

De pulsrespons beschrijft de uitvoer van een lineair systeem ten gevolge van een eenheidsinvoer die gedurende de tijdstap Δt gelijkmatig aan het systeem wordt toegevoegd. De pulsrespons kan worden gevonden door Richards' vergelijking te lineariseren en de gelineariseerde vergelijking op te lossen voor een eenheidsinvoer gelijkmatig toegevoegd tussen $t = 0$ en $t = \Delta t$ (zie Walvoort en Bierkens (1998) voor details). Omdat de gelineariseerde Richards' vergelijking dezelfde vorm heeft als de lineaire advection-dispersievergelijking kunnen we deze oplossing vinden in standaardboeken over het transport van opgeloste stoffen in grondwater (Bear, 1979, pag 286):

$$U_p(\Delta t, t) = S_p(t) - S_p(t - \Delta t) \quad (9)$$

en

$$S_p(t) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\bar{d}_p - A t}{2\sqrt{Bt}} \right) + \exp \left(\frac{A \bar{d}_p}{B} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{\bar{d}_p + A t}{2\sqrt{Bt}} \right) \right] \quad (10)$$

Hierin is \bar{d}_p de gemiddelde dikte van de percolatiezone en A en B zijn parameters die kunnen worden berekend uit de onverzadigde doorlatendheidscurve en het evenwichtsvochtprofiel van de percolatiezone (Walvoort en Bierkens, 1998). Ook hier geldt dat deze relaties kunnen worden bepaald uit laboratoriumbepalingen of uit de Staringreeks (Wösten e.a., 1994). In geval de percolatiezone uit meerdere bodemlagen bestaat, dan kan voor elke laag met (9) en (10) de pulsrespons worden berekend. Vervolgens wordt (8) toegepast voor elke laag afzonderlijk, waarbij de uitvoer van de ene laag dient als invoer voor de laag eronder. Hierbij merken we op dat (10) de staprespons is voor een kolom die oneindig ver naar beneden doorloopt. Strikt genomen levert de toepassing ervan voor een percolatiezone met meerdere lagen dus een benadering van de grondwateraanvulling.

In het computerprogramma waarin het bodemmodel en het grondwatermodel zijn geïmplementeerd, is het mogelijk aan te geven welke fractie van het percolatiewater direct aan het grondwatersysteem wordt toegevoegd (i.c. *bypass flow*) en welke fractie vertraagd en gedempt via vergelijking (8) wordt toegevoegd.

Het grondwatersysteem

Figuur 1 toont een perceel met volkomen waterlopen en een vast peil. De volgende parameters en variabelen zijn weergegeven:

h	:	grondwaterstand ten opzichte van het peil in de waterlopen [L]
L	:	afstand tussen de waterlopen [L]
D	:	effectieve drainagediepte [L];
k	:	doorlatendheid [LT^{-1}]
μ	:	effectieve opbrengstcoëfficiënt [-];
x	:	afstand vanaf linker waterloop [L].
q_d	:	specifieke afvoer/aanvoer (dus de lokale flux naar/van het oppervlaktewatersysteem) [LT^{-1}].

De netto invoer van het grondwatersysteem q_n wordt gegeven door (figuren 1 en 2):

$$q_n = q_g + q_v - q_c \quad (11)$$

waarin

q_g	:	grondwateraanvulling [LT^{-1}];
q_v	:	regionale flux: kwel ($q_v > 0$) of wegzijging ($q_v < 0$) [LT^{-1}];
q_c	:	capillaire opstijging [LT^{-1}].

Als we veronderstellen dat de doorlatendheid k homogeen is, er geen verticale stijghoogteverschillen zijn (de stroming is horizontaal) en dat de opbolling veel kleiner is dan de effectieve drainagediepte, dan wordt de grondwaterstand ten opzichte van het peil in de waterlopen $h(x,t)$ beschreven door de volgende partiële differentiaalvergelijking:

$$kD \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + q_n = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (12)$$

met

$$\begin{aligned} kD & : && \text{de transmissiviteit [L}^2\text{t}^{-1}\text{]} \\ \mu & : && \text{de (effectieve) freatische opbrengstcoëfficiënt [-]} \end{aligned}$$

Als we deze oplossen voor een eenheidsinvoer die gelijkmatig aan het grondwatersysteem wordt toegevoegd tussen $t = 0$ en $t = \Delta t$, dan volgt de pulsrespons van het grondwatersysteem uit de oplossing van Kraijenhoff van de Leur (1958):

$$U_h(x, \Delta t, t) = \frac{32}{\pi^3} \gamma \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^{-3} \left[\exp\left(\frac{n^2 \pi^2 \Delta t}{8\mu\gamma}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{8\mu\gamma}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (13)$$

De variabele γ is de drainageweerstand [T]. Deze is hier gedefinieerd als het quotiënt van de opbolling midden op het perceel en de specifieke afvoer, onder stationaire omstandigheden (CHO-TNO, 1986). Onder stationaire omstandigheden geldt dat $q_d = q_n$. Met behulp van de oplossing van Kraijenhoff van de Leur (1958) vinden we dan:

$$\gamma = \frac{h(x=0,5L, t \rightarrow \infty)}{q_d} = \frac{h(x=0,5L, t \rightarrow \infty)}{q_n} = \frac{L^2}{8kD} \quad (14)$$

Als we uit het bodemmodel en (11) de netto invoer kennen, kunnen we met de pulsrespons de grondwaterstand berekenen voor discrete tijdstappen Δt :

$$h(x, t_k) = \sum_{i=1}^k q_n(t_i) U_h(x, \Delta t, t_{k-i-1}) \quad (15)$$

Om er praktisch mee te rekenen moet vergelijking (15) op twee manieren worden aangepast. Ten eerste geldt dat de netto invoer afhankelijk is van de grondwaterstand via de capillaire opstijging: $q_n(t_k) \equiv q_n(t_k, h(t_k))$. In dat geval kunnen we (15) dus niet toepassen om $h(t_k)$ expliciet te berekenen. Daarom zullen we werken met de volgende benadering: $q_n(t_k) \approx q_n(t_k, h(t_{k-1}))$. Bij de berekening van de capillaire opstijging in het bodemmodel nemen we dus de grondwaterstand op de vorige tijdstap. Verder geldt dat het niet erg praktisch is om (15) voor elke tijdstap te evalueren omdat dan alle voorgaande tijdstappen steeds opnieuw moeten worden doorgerekend. We kunnen (15) echter herschrijven volgens de dag-voor-dagmethode van De Zeeuw (1966). Als we de hogere-orde-termen in het zogenaamde 'onevenredig afstromend deel' verwaarlozen, krijgen we de volgende recurrente betrekking tussen netto-invoer en de grondwaterstand (Walvoort en Bierkens, 1998):

$$h(t_k) \approx \varepsilon h(t_{k-1}) + \alpha q_n(t_{k-1}, h(t_{k-2})) + \beta q_n(t_k, h(t_{k-1})) \quad (16)$$

De coëfficiënten α , β en ε worden gegeven in de appendix. De locatie x hebben we vanwege de eenvoud van notatie uit (16) weggelaten.

Stochastische formulering

Net als bij het model in het eerste artikel willen we de onzekerheid van modelvoorspellingen, die het gevolg is van de modelveronderstellingen en de onzekerheden in modelparameters, invoer en beginvoorwaarden, expliciet maken. Dit wordt in dit geval gedaan door een (stochastisch) ruisproces W op te tellen bij de meest onzekere variabele van het grondwatermodel, namelijk de netto invoer q_n . Dit resulteert in het volgende stochastische model:

$$H(t_k) = \varepsilon H(t_{k-1}) + \alpha Q_n(t_{k-1}; H(t_{k-2})) + \beta Q_n(t_k; H(t_{k-1})) + \alpha W(t_{k-1}) + \beta W(t_k) \quad (17)$$

Omdat W wordt toegevoegd, geldt nu dat h een stochastisch proces wordt en daarmee ook q_n via de capillaire opstijging. In het vervolg van dit artikel worden de stochastische variabelen of stochastische processen geschreven met hoofdletters en hun deterministische pendanten (zoals in vergelijking 16) met kleine letters.

We kunnen het ruisproces W op vele manieren beschrijven. Hier wordt het ruisproces gemodelleerd door een eerste orde autoregressief proces of AR(1)-proces dat wordt beschreven door (Chatfield, 1989):

$$W(t_k) = \phi W(t_{k-1}) + \xi(t_k) \quad (18)$$

met

W	:	ruisproces [LT ⁻¹];
ϕ	:	autoregressieve parameter [-];
ξ	:	discreet witte-ruisproces [LT ⁻¹]

Het witte-ruisproces heeft gemiddelde 0 en variantie σ_ξ^2 [L²T⁻²]. Het AR(1)-proces wordt dus volledig beschreven door de parameters ϕ en σ_ξ^2 .

Analoog aan de grondwaterstand kan men ook het stochastisch model voor de specifieke afvoer afleiden (Walvoort en Bierkens, 1998). Dit model wordt

$$Q_d(t_k) = \varepsilon Q_d(t_{k-1}) + \eta Q_n(t_{k-1}; H(t_{k-2})) + \nu Q_n(t_k; H(t_{k-1})) + \eta W(t_{k-1}) + \nu W(t_k) \quad (19)$$

waarbij ε dezelfde is als voor de grondwaterstand en η en ν worden gegeven in de appendix.

Relatie met transfer-ruismodellen en de hoedanigheid van het ruisproces

Vergelijkingen (17) en (19) hebben een vergelijkbare vorm als de transfer-ruismodellen die beschreven zijn in Box en Jenkins (1976). Deze zijn veelvuldig toegepast om de fluctuatie van grondwaterstanden te beschrijven (bijv. Gehrels e.a., 1994; Van Geer en Zuur, 1997; Knotters en Van Walsum, 1997). Het verschil met deze modellen is dat de parameters van (17) en (19) zijn opgebouwd uit fysische grootheden (zie appendix), zoals de afstand tussen de drainagemiddelen, de afstand van de locatie tot de drainagemiddelen, de drainageweerstand en de effectieve opbrengstcoëfficiënt [-]. Vandaar dat we aan het begin van dit artikel de stelling uit het proefschrift van Van Geer (1987) hebben vermeld. Verder geldt dat de netto-invoer gekoppeld is aan de bodemopbouw. Theoretisch moet het dus mogelijk zijn om

op een onbemeten locatie op basis van een boorbeschrijving en veldwaarnemingen een inschatting te maken van de parameters van (17) en (19). Deze eigenschap willen we gebruiken voor ruimte-tijdmodellering van grondwaterstandsreeksen. Hierop komen we verderop terug.

Naast de expliciete fysische interpreteerbaarheid van de parameters is er nog een belangrijk verschil tussen (17) en (19) en transfer-ruismodellen. Bij transfer-ruismodellen wordt het ruisgedeelte opgeteld bij de primaire variabele, i.c. grondwaterstand of specifieke afvoer, terwijl de ruis hier wordt opgeteld bij de invoer. Het gevolg is dat, naast de fluctuatie van de grondwaterstand zelf, ook de bijdrage van de ruis toeneemt naarmate de beschreven locatie verder van een ontwateringsmiddel ligt (α en β worden groter). Dit lijkt plausibel omdat het te verwachten is dat, naarmate de grondwaterstand een grotere amplitude heeft, de voorspellingsfouten ook groter zullen worden.

In de praktijk geldt vaak dat de ligging van de locatie ten opzichte van de ontwateringsmiddelen niet goed bekend is. Men kan dan in α en β het beste x/L gelijk aan $1/2$ stellen. In zandgebieden is het overigens zonder meer aan te raden x/L gelijk aan $1/2$ te stellen, omdat daar het grootste gedeelte van de drainageweerstand is geconcentreerd rond de waterloop (radiale en intreeweerstand) zodat het grondwaterprofiel meer lijkt op een tafelmodel dan op een sinusfunctie. In dat geval zal de gekalibreerde drainageweerstand voor een groot gedeelte bestaan uit de radiale en intreeweerstand en slechts voor een gering gedeelte uit de horizontale weerstand (14).

Tenslotte is het goed om de verschillen in aanpak aan te geven tussen het stochastisch model in het eerste artikel en dat van dit artikel. In het eerste artikel wordt de ruis als een continu proces bij de differentiaalvergelijking opgeteld voordat deze wordt opgelost. Het resultaat is dat de ruis een integraal onderdeel vormt van de oplossing. Dit is wiskundig gezien een stuk lastiger dan de methode die in het tweede artikel is gevolgd. Hier hebben we eerst de differentiaalvergelijking opgelost. Deze leidt vanwege het gebruik van de discrete netto-invoer tot een eenvoudige recurrente betrekking. Vervolgens is daar een discreet ruisproces bij opgeteld.

Stochastische simulatie en voorspelling

Vergelijking (17) kan samen met het bodemmodel gebruikt worden om uit reeksen van neerslag en potentiële evapotranspiratie realisaties van grondwaterstandsreeksen te simuleren. Stel dat we realisaties van 1000 dagen willen simuleren. We trekken dan 1000 *random* getallen ξ_k uit een normale verdeling met gemiddelde 0 en variantie σ_ξ^2 . Met de 1000 ξ_k kunnen we met (18) voor elk van de 1000 dagen een element van het ruisproces $W(t_k)$ genereren. Met de elementen $W(t_k)$ in (17), het bodemmodel en meetreeksen van dagelijkse neerslag en potentiële evapotranspiratie kan dan een realisatie van de grondwaterstandsreeks worden berekend. Uit 1000 nieuwe *random* getallen volgt een nieuwe realisatie. Op deze wijze kunnen een groot aantal evenzo waarschijnlijke realisaties van grondwaterstandsreeksen worden gesimuleerd. Hieruit kan op elk tijdstip de kansverdeling van de grondwaterstand worden berekend. Eenzelfde procedure kan worden gevolgd voor de stochastische simulatie van specifieke afvoeren met vergelijking (19).

Het doel van het model kan ook zijn om op een onbemeten tijdstip de grondwaterstand of de specifieke afvoer te voorspellen. In dat geval kan gebruik gemaakt worden van de statistische verwachting van (17) en (19). Voorspellen wordt hier gebruikt in statistische zin en is

dus equivalent met de Engelse term 'prediction' en niet met de term 'forecasting'. Walvoort en Bierkens (1998) laten zien dat de verwachting van (17) gelijk is aan het deterministische model (16). Om voorspellingen te maken kunnen we dus de deterministische modellen voor de grondwaterstand en de specifieke afvoer gebruiken. De voorspellingsfouten voor een zeker tijdstip t_k worden dan:

$$H'(t_k) = H(t_k) - h(t_k) \quad (20)$$

$$Q_d'(t_k) = Q_d(t_k) - q_d(t_k) \quad (21)$$

De variantie van de voorspelfout geeft een maat voor de nauwkeurigheid van de voorspelling. Als de invloed van de beginvoorwaarden is uitgewerkt worden deze varianties gegeven door (Walvoort en Bierkens, 1998):

$$\text{Var}[H'(t_k)] = \sigma_\xi^2 \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \varepsilon\phi) + 2\alpha\beta(\varepsilon + \phi)}{(1 - \phi^2)(1 - \varepsilon\phi)(1 - \varepsilon^2)} \quad (22)$$

$$\text{Var}[Q_d'(t_k)] = \sigma_\xi^2 \frac{(\eta^2 + \nu^2)(1 + \varepsilon\phi) + 2\eta\nu(\varepsilon + \phi)}{(1 - \phi^2)(1 - \varepsilon\phi)(1 - \varepsilon^2)} \quad (23)$$

Strikt genomen zijn (22) en (23) alleen geldig voor het geval dat er geen capillaire opstijging plaatsvindt. Uit simulatiestudies blijkt echter dat ze ook in het geval van capillaire opstijging een goede benadering voor de variantie van de voorspelfout geven (Walvoort en Bierkens, 1998).

Kalibratie

De meeste parameters van het model kunnen verkregen worden uit profielbeschrijvingen en veldwaarnemingen. Parameters die moeilijk zijn te schatten en dus door kalibratie bepaald moeten worden zijn: γ , μ , q_v , ϕ en σ_ξ^2 . Omdat de ruis na het oplossen van de differentiaalvergelijking erbij opgeteld is, kunnen we de kalibratie van het deterministische gedeelte en het stochastische gedeelte van het model scheiden.

Bij het kalibreren van het deterministische gedeelte worden de 'fysische' parameters γ , μ en q_v gekalibreerd door minimalisatie van de volgende doelfunctie:

$$J(\gamma, \mu, q_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y(t_i) - h(t_i)]^2 \quad (24)$$

waarin $y(t_i)$ staat voor een waarneming van de grondwaterstand, t_i voor de tijdstippen waarop is waargenomen, N voor het aantal waarnemingen en $h(t_i)$ is berekend met (16).

Nadat het deterministische gedeelte is gekalibreerd kunnen ϕ en σ_ξ^2 worden geschat via kalibratie van het stochastische model. Hiervoor worden de residuen $y(t_i) - h(t_i)$ berekend uit de waarnemingen en het gekalibreerde deterministische model (16). Vervolgens wordt de autocovariantiefunctie van de residuen geschat door

$$C(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} [y(t_i) - h(t_i)][y(t_i + \tau) - h(t_i + \tau)] \quad (25)$$

waarin τ de lag [T] is. Walvoort en Bierkens (1998) geven de theoretische autocovariantiefunctie voor de residuen. Door de theoretische autocovariantiefunctie aan te passen op de experimentele berekend met (25) kunnen de waarden voor ϕ en σ_{ξ}^2 worden geschat.

Toepassing op twee locaties

Het model dat in dit artikel is beschreven is toegepast op dezelfde twee locaties (locatie 1: 12E10003; locatie 2: 12B10015; Groningen, vlakbij Eelde) als de SDV uit artikel 1. Voor een beschrijving van de data wordt dan ook verwezen naar het eerste artikel. In de volgende paragrafen zal het model uit dit artikel worden aangeduid met EMERALD, hetgeen de naam is van het computerprogramma waarin het model is geïmplementeerd.

Kalibratie en validatie

De parameters die voor beide locaties zijn verkregen uit de profiel- en locatie-beschrijvingen worden hier niet apart vermeld, maar komen overeen met de parameters die worden gegeven in tabel 1 van het eerste artikel (Bierkens, 1998). Bij de kalibratie is x/L gelijkgesteld aan $1/2$. Vanwege de ondiepe grondwaterstanden op beide locaties is de percolatiezone niet meegenomen met de modellering: $q_g = q_p$. Net als de SDV in het eerste artikel is EMERALD gekalibreerd op waarnemingen (tweemaal per maand) voor de perioden 1982–1986, 1987–1991 en de gehele periode 1982–1991. Tabel 1 toont voor deze drie perioden de gekalibreerde parameters. Te zien is dat de gekalibreerde parameter sets voor de drie perioden op elkaar lijken, met uitzondering van de parameters ϕ en σ_{ξ}^2 voor locatie 1. Dit komt doordat vanwege het geringe geheugen van het grondwatersysteem op deze locatie, opeenvolgende waarnemingen weinig gecorreleerd zijn. Daardoor is het moeilijk om de parameters van het ruisproces te schatten uit de covariantiefunctie. Eigenlijk zou men dus op deze locatie met een grotere waarnemingsfrequentie moeten werken.

Bij de validatie en verificatie is dezelfde procedure gevolgd als in het eerste artikel met SDV: 1) kalibratie op 1982–1986: verificatie op 1982–1986, validatie op 1987–1991; 2) kalibratie op 1987–1991: validatie op 1982–1986, verificatie op 1987–1991; 3) kalibratie op 1982–1991: verificatie op 1982–1991. Tabel 2 toont de resultaten. Vergelijking van deze tabel met tabel 3 uit artikel 1 laat zien dat met EMERALD vergelijkbare resultaten worden behaald als met de SDV. Het percentage residuen dat buiten de 2,5- en 97,5-percentielen valt (i.c. berekend met vergelijking (22)) is echter iets te groot, met name voor locatie 2. Overigens blijkt uit de validatieresultaten niet dat de SDV het beter doet voor ondiepe grondwaterstanden (locatie 1) en EMERALD voor diepere grondwaterstanden (locatie 2). Wellicht dat de verschillen duidelijker worden bij diepere of zeer ondiepe grondwaterstanden.

Tabel 1: Parameterwaarden die zijn verkregen door kalibratie van EMERALD op locaties 1 en 2 voor verschillende perioden.

Locatie 1					
Periode	γ (dagen)	μ (-)	q_V (mm/d)	ϕ (-)	σ_{ξ}^2 (mm ² /d ²)
1982-1986	88	0,16	-2,32	0,79	0,0213
1987-1991	85	0,19	-3,23	-0,19	0,6207
1982-1991	86	0,17	-2,79	0,99	0,0002

Locatie 2					
Periode	γ (dagen)	μ (-)	q_V (mm/d)	ϕ (-)	σ_{ξ}^2 (mm ² /d ²)
1982-1986	305	0,29	-0,34	-0,98	0,522
1987-1991	256	0,33	-0,40	-0,98	0,745
1982-1991	274	0,31	-0,36	-0,98	0,669

Tabel 2: Validatie- en verificatieresultaten; ME = gemiddelde voorspellingsfout (m); RMSE = de wortel van de gemiddelde kwadratische fout (m); p: percentage residuen buiten de 2,5- en 97,5-percentielen; 1: gekalibreerd op 1982-1986; 2: gekalibreerd op 1987-1991; 3: gekalibreerd op 1982-1991.

Locatie 1									
	1982-1986			1987-1991			1982-1991		
	ME	RMSE	p	ME	RMSE	p	ME	RMSE	p
1	0,000	0,110	5	-0,073	0,134	8			
2	0,074	0,133	8	0,000	0,110	4			
3							0,000	0,117	11

Locatie 2									
	1982-1986			1987-1991			1982-1991		
	ME	RMSE	p	ME	RMSE	p	ME	RMSE	p
1	0,000	0,123	11	-0,038	0,126	10			
2	0,033	0,133	9	0,000	0,114	9			
3							0,000	0,121	8

Vergelijking van modellen

Na kalibratie van het model kunnen we met vergelijkingen (17) en (19) langjarige reeksen van dagelijkse grondwaterstanden en afvoeren simuleren, bijvoorbeeld ten behoeve van het ontwerp van kunstwerken en het waterbeheer. We zullen de resultaten van deze simulaties hier niet herhalen omdat ze sterk overeenkomen met die zijn verkregen met de SDV in het eerste artikel. Voorbeelden van statistieken die zijn gebaseerd op dergelijke simulaties en een vergelijking daarvan met de statistieken van de waarnemingen worden gegeven in Walvoort en Bierkens (1998).

In plaats van het nogmaals tonen van statistieken van simulaties lijkt het ons interessanter om de nauwkeurigheid van voorspellingen met verschillende methoden te vergelijken. We hebben vijf verschillende (stochastische) methoden of modellen vergeleken die gebruikt kunnen worden voor het voorspellen van grondwaterstanden op basis van neerslag en potentiële verdamping. In toenemende mate van complexiteit en hoeveelheid fysica die in het model zijn gestopt zijn dit:

TFN: transfer-ruismodellen (Gehrels e.a. (1994), Van Geer en Zuur (1997) en Knotters en Van Walsum (1997)). De deterministische component van het transfer-ruismodel bestaat uit een lineaire relatie tussen het neerslagoverschot en grondwaterstand. De residuen op deze relatie worden beschreven met een vergelijkbaar model als vergelijking (18).

TARSO: (Tong, 1990; Knotters en De Gooijer, 1998). TARSO-modellen zijn niet-lineaire tijdreeks- of transfer-ruismodellen. Het grondwaterstandsverloop wordt onderverdeeld in 'regimes', onderscheiden door 'thresholds' of drempelwaarden. Voor elk regime geldt een andere deterministische relatie tussen de grondwaterstand en het neerslagoverschot. Ook het ruismodel zoals (18) dat de residuen beschrijft, is verschillend voor elk regime. Op deze wijze kunnen verschillende bodemlagen en het voorkomen van drains of greppels worden gemodelleerd;

SDV: de stochastische differentiaalvergelijking beschreven in het eerste artikel (Bierkens, 1998);

EMERALD: het stochastische model beschreven in dit artikel;

SWATRE+RUIS: (Belmans e.a., 1983; Knotters en Van Walsum, 1997). Hierbij wordt de deterministische relatie tussen het neerslagoverschot beschreven door het oplossen van Richards' vergelijking voor onverzadigde stroming door de bodem. De residuen worden gemodelleerd met een ruismodel zoals (18).

Elk van deze modellen kan gebruikt worden om grondwaterstanden te *voorspellen* (met het deterministische deel), alsmede om evenzo waarschijnlijke reeksen van grondwaterstanden te *simuleren* (combinatie van het deterministische deel en het ruismodel). In dit artikel worden alleen de deterministische gedeelten van bovengenoemde modellen vergeleken. Er wordt dus voor elk model nagegaan hoe goed het gebruikt kan worden om de grondwaterstanden uit neerslag en potentiële verdamping te voorspellen. Hiervoor zijn de vijf modellen op beide locaties (locatie 1: 12E10003; locatie 2: 12B10015) gekalibreerd op de grondwaterstandswaarnemingen uit de periode 1987-1991 en gevalideerd op de periode 1982-1986. Tabel 3 toont de resultaten. Te zien is dat er geen duidelijke verschillen in nauwkeurigheid zijn waar te nemen tussen de verschillende modellen (tussen de 12 en 14 cm). De trend in grondwaterstanden op locatie 1 komt in elk model terug als een gemiddelde onderschatting

Tabel 3: Vergelijking van validatieresultaten van een lineair transfer-ruismodel (TFN), een niet-lineair transfer-ruismodel (TARSO), de stochastische differentiaalvergelijking (SDV), het model beschreven in dit artikel (EMERALD) en een bodemfysisch model (SWATRE); kalibratie op periode 1987-1991; validatie op periode 1982-1986; ME = gemiddelde voorspellingsfout (cm); RMSE = de wortel van de gemiddelde kwadratische fout (cm).

	TFN		TARSO		SDV		EMERALD		SWATRE+RUIS	
	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE
Locatie 1	6,8	13,7	5,6	13,6	6,6	12,8	7,4	13,3	6,5	13,2
Locatie 2	2,1	12,6	0,4	12,3	1,1	12,2	3,3	13,3	3,6	12,8

van de grondwaterstand van circa 6 tot 7 cm. Duidelijk is dat er voor de onderzochte locaties geen noemenswaardige verschillen zijn waar te nemen tussen het voorspellend vermogen van de beschouwde modellen. Dit is opvallend omdat de modellen sterk verschillen in de hoeveelheid fysica die er is in gestopt.

Deze resultaten betekenen natuurlijk geenszins dat de vijf genoemde modellen voor alle toepassingen evengoed zullen presteren. De keuze van het modeltype zal onder meer afhangen van vragen als:

- Moeten de modellen regionaal en dus snel en goedkoop worden toegepast?
- Moeten voorspellingen of simulaties op dagbasis worden gedaan of met tijdstappen die gebaseerd zijn op de meetfrequentie (bijv. 2 x per maand)?
- Is er sprake van belangrijke niet-lineaire effecten?
- Zijn naast grondwaterstanden ook afvoeren en bodemvochtgehalten nodig?
- Moeten voorspellingen gedaan worden onder veranderende hydrologische omstandigheden?

Discussie: Tijd-ruimte-modellering

Momenteel doen we onderzoek naar de mogelijkheid om de SDV en EMERALD te gebruiken om de volledige tijd-ruimte-variantie van de grondwaterstand te modelleren. Het idee is het model (de SDV of EMERALD) te kalibreren op een locatie waar grondwaterstanden zijn gemeten en het gekalibreerde model vervolgens toe te passen op een groot aantal locaties met boorbeschrijvingen die rond de locatie van de grondwaterstandsbuis liggen en hydrologisch vergelijkbaar zijn. De gekalibreerde parameters zoals drainageweerstand en ruispaparameters worden dan op de boorlocaties gelijk verondersteld aan die op de locatie van de grondwaterstandsbuis. De bodemfysische parameters en het bodemgebruik kunnen per boorlocatie verschillen en worden vastgesteld aan de hand van de boorbeschrijvingen. Op deze wijze kunnen vervolgens op alle boorlocaties langjarige reeksen van grondwaterstanden of afgeleide grootheden worden gesimuleerd. Een volledige tijd-ruimte-modellering volgt dan door ruimtelijke (geostatistische) interpolatie tussen de boorlocaties. Dit is mogelijk vanwege de grote dichtheid van boorbeschrijvingen in de archieven van het Staring Centrum, variërend van 1 tot 2 boringen per ha tot 1 boring per 7 ha. We verwachten dat bij de ruimtelijke interpolatie aanvullende informatie, zoals gedetailleerde maai-veldhoogten uit laserscanning een belangrijke rol zal kunnen spelen. Uiteindelijk moet deze procedure leiden tot de mogelijkheid om op dagbasis het freatisch vlak in een gebied te simuleren, alsmede de gebiedsafvoer te berekenen en het effect van lokale ingrepen op deze grootheden te analyseren. Momenteel wordt een studie uitgevoerd in het Waterschap Meppelerdiep om bovenstaande ideeën te beproeven. Wij hopen in de nabije toekomst de resultaten hiervan in STROMINGEN te kunnen rapporteren.

Lijst van symbolen

A	:	parameter in pulsresponsie percolatiezone [LT^{-1}]
B	:	parameter in pulsresponsie percolatiezone [L^2T^{-1}]
d_r	:	dikte wortelzone (effectieve worteldiepte) [L]
\bar{d}_p	:	gemiddelde dikte van de percolatiezone [L]
D	:	effectieve drainagediepte [L];
E_a	:	werkelijke evapotranspiratie [LT^{-1}]
E_r	:	referentie-evapotranspiratie ([LT^{-1}])
F_c	:	gewasfactor [-]
h of H	:	grondwaterstand ten opzichte van het peil in de waterlopen [L]
k	:	doorlatendheid [LT^{-1}]
L	:	afstand tussen de waterlopen [L]
N	:	aantal waarnemingen [-]
P	:	neerslag [LT^{-1}]
q_c	:	capillaire opstijging [LT^{-1}]
q_d of Q_d	:	specifieke afvoer/aanvoer (naar/van het oppervlaktewatersysteem) [LT^{-1}]
q_g	:	grondwateraanvulling [LT^{-1}]
q_n of Q_n	:	netto invoer in grondwatersysteem [LT^{-1}]
q_p	:	percolatie [LT^{-1}]
q_v	:	regionale flux: kwel ($q_v > 0$) of infiltratie ($q_v < 0$) [LT^{-1}]
t	:	tijd [T]
t_j	:	tijdstap j [T]
$U_{h(x,\Delta t,t)}$:	pulsrespons grondwaterstand [T]
$U_{p(\Delta t,t)}$:	pulsrespons van de percolatiezone [-]
V	:	volume bodemvocht in de wortelzone [L]
V_{max}	:	maximale volume bodemvocht in de wortelzone [L]
V_{min}	:	minimale volume bodemvocht in de wortelzone [L]
W	:	ruisproces [LT^{-1}]
x	:	afstand vanaf linker waterloop [L]
α	:	parameter in recurrente betrekking grondwaterstand [T]
α_s	:	reductiefunctie voor vochttekort [-]
β	:	parameter in recurrente betrekking grondwaterstand [T]
γ	:	drainageweerstand [T]
Δt	:	duur van de tijdstap t_i [T]
ε	:	parameter in recurrente betrekking grondwaterstand en specifieke afvoer [-]
η	:	parameter in recurrente betrekking specifieke afvoer [T]
θ_{fc}	:	vochtgehalte bij veldcapaciteit [-]
θ_{wp}	:	vochtgehalte bij verwelkingspunt [-]
μ	:	effectieve opbrengstcoëfficiënt [-]
ν	:	parameter in recurrente betrekking specifieke afvoer [T]
ξ_i	:	discreet witte-ruisproces [LT^{-1}]
σ_{ξ}^2	:	variantie witte-ruisproces [L^2T^{-2}]
ϕ	:	autoregressieve parameter [-]

Literatuur

- Belmans, C., J.G. Wesseling en R.A. Feddes (1983)** Simulation of the water balance of a cropped soil: SWATRE; in: *Journal of Hydrology*, nr 63, pag 271–286.
- Bear, J. (1979)** *Hydraulics of Groundwater*; McGraw-Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering, New-York.
- Bierkens, M.F.P. (1998)** Eenvoudige stochastische modellen voor grondwaterstandsfluctuaties, deel 1: Een stochastische differentiaalvergelijking; in: *Stromingen*, jrg 4, nr 2, pag 5–26.
- Box, G.E.P. en G.M. Jenkins (1976)** *Time Series Analysis; forecasting and control*; revised edition; Holden Day, San Francisco.
- Chatfield, C. (1989)** *The Analysis of Time Series; an introduction*; fourth edition; Chapman and Hall, London.
- CHO-TNO (1986)** Verklarende Hydrologische Woordenlijst, Commissie voor Hydrologisch Onderzoek TNO, Rapporten en Nota's 16, 's-Gravenhage.
- Feddes, R.A. (1987)** Crop factors in relation to Makkink reference-crop evapotranspiration; Verslagen en Mededelingen 39, Commissie voor Hydrologisch Onderzoek TNO, pag 33–45, 's-Gravenhage.
- Feddes, R.A., P.J. Kowalik en H. Zaradny (1978)** *Simulation of Field Water Use and Crop Yield*; Pudoc, Wageningen.
- Geer, F.C. van (1987)** Applications of Kalman filtering on the analysis and design of groundwater monitoring networks; proefschrift Technische Universiteit Delft, Delft.
- Geer, F.C. van en A.F. Zuur (1997)** An extension of Box-Jenkins transfer/noise models for spatial interpolation of groundwater head series; in: *Journal of Hydrology*, nr 192, pag. 65–80.
- Gehrels, J.C. (1995)** Niet-stationaire grondwatermodellering van de Veluwe. Een studie naar de invloed van de grondwaterwinning, inpoldering en verloofing op de grondwaterstand sinds 1951; rapport Vrije Universiteit, Amsterdam.
- Gehrels, J.C., F.C. van Geer en J.J. de Vries (1994)** Decomposition of groundwater level fluctuations using transfer modelling in an area with shallow to deep unsaturated zones; in: *Journal of Hydrology*, nr 157, pag 105–138.
- Knotters, M. en P.E.V. van Walsum (1997)** Estimating fluctuation quantities from time series of water table depths using models with a stochastic component; in: *Journal of Hydrology*, nr 197, pag 25–46.
- Knotters, M. en J.G. de Gooijer (1998)** TARSO-Modeling of water table depths (ingediend).
- Kraijenhoff van de Leur, D.A. (1958)** A study of non-steady groundwater flow with special reference to a reservoir-coefficient; in: *De Ingenieur* 70, nr 19, pag 87–94.
- Makkink, G.F. (1960)** De verdamping uit vegetaties in verband met de formule van Penman; Verslagen en Mededelingen 4, Commissie Hydrologisch Onderzoek TNO, pag 90–115, 's-Gravenhage.
- Tong, H (1990)** *Non-Linear Time Series: A Dynamical System Approach*; Oxford University Press, Oxford.
- Wösten, J.H.M., G.J. Veerman en J. Stolte (1994)** Waterretentie- en doorlatendheidskarakteristieken van boven- en ondergronden in Nederland: de Staringreeks, vernieuwde uitgave; Technisch document 18, DLO-Staring Centrum, Wageningen.

Walvoort, D.J.J. en M.F.P. Bierkens (1998) Stochastic modelling approach for rapid assessment of groundwater dynamics; report (in druk), DLO-Staring Centrum, Wageningen.

Wiersum, L.K. en A. Reijmerink (1990) Beworteling; in: W.P. Locher en H. de Bakker (red) Bodemkunde van Nederland, deel 1: Algemene Bodemkunde; Malmberg, Den Bosch, pag. 245–267.

Zeeuw, J.W. de (1966) Analyse van het Afvoerverloop van Gebieden met Hoofdzakelijk Grondwaterafvoer; proefschrift Landbouwhogeschool, Wageningen.

Zwamborn, M.H. (1995) Modellerling van de onverzadigde zone ten behoeve van grondwatermodellen; Kiwa rapport SWI 95.142, Nieuwegein.

Appendix

Coëfficiënten in betrekkingen (16), (17) en (19):

$$\varepsilon = \exp\left(-\frac{\Delta t \pi^2}{8\mu \gamma}\right)$$

$$\alpha = -\varepsilon \Delta U_h(1)$$

$$\beta = \frac{32}{\pi^3} \gamma (1-\varepsilon) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \Delta U_h(1)$$

met

$$\Delta U_h(1) = \frac{32}{\pi^3} \gamma \sum_{n=3,5,7}^{\infty} n^{-3} (1-\varepsilon^{n^2}) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$\eta = -\varepsilon \Delta Q_{q_d}(1)$$

$$v = \frac{8}{\pi^2} (1-\varepsilon) + \Delta U_{q_d}(1)$$

met

$$\Delta U_{q_d}(1) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=3,5,7}^{\infty} n^{-2} (1-\varepsilon^{n^2})$$