
Eenvoudige stochastische modellen voor grondwaterstandsfluctuaties

Deel 1: Een stochastische differentiaalvergelijking

Marc F.P. Bierkens

In het kader van het onderzoek naar alternatieven voor grondwatertrappen zijn twee eenvoudige stochastische modellen ontwikkeld waarmee grondwaterstandsfluctuaties op een locatie kunnen worden beschreven. Als op de locatie slechts gedurende een korte periode grondwaterstanden gemeten zijn, kunnen de stochastische modellen gebruikt worden om een groot aantal langjarige reeksen van grondwaterstanden te simuleren. Deze kunnen vervolgens worden gebruikt voor het ontwerp van kunstwerken en het vaststellen van waterbeheer, eventueel aangevuld met een risico-analyse. Hierbij kan ook het effect van lokale ingrepen worden geanalyseerd. Het ligt in de bedoeling om de modellen te gaan gebruiken als basis voor tijd-ruimtemodellering van grondwaterstanden en het berekenen van gebiedsafvoeren. De stochastische modellen worden beschreven in twee artikelen. In elk artikel wordt een model afgeleid en gevalideerd op twee locaties waar grondwaterstanden zijn waargenomen. In dit artikel wordt een model besproken dat geschikt wordt geacht voor ondiepe grondwaterstanden (Gt's I-V), terwijl het model in het tweede artikel bedoeld is voor diepere grondwaterstanden.

Inleiding

In grote delen van Nederland heeft de grondwaterstandsdiepte grote invloed op de agrarische productie, het ecologisch potentieel van natuurgebieden en de hoeveelheid fosfaat en nitraat die uitspoelt uit zwaar bemeste percelen. Hierbij gaat het niet alleen om de gemiddelde grondwaterstandsdiepte, maar ook om de variatie ervan in ruimte en tijd. Tot op heden is gebiedsdekkende informatie over de ruimtelijke en temporele variatie van de grondwaterstandsdiepte voornamelijk beschikbaar in de vorm van kaarten met grondwatertrappen (Gt's) (Van Heesen, 1970). Hoewel de grondwatertrappenkaart nog steeds een belangrijke bron van informatie is voor ruimtelijke studies in het landelijk gebied, en dit in de toekomst zeker nog zal blijven, kleven er belangrijke bezwaren aan het principe van de Gt (werkgroep Gt-Onderzoek, 1991). Een bezwaar van ecologen is dat de Gt-indeling sterk is toegespitst op landbouwkundige toepassingen. Liever zou men informatie hebben over overschrijdingskansen en overschrijdingsduren van de grondwaterstand. Hydrologen opperen vaak dat een gedegen hydrologische onderbouwing van de Gt ontbreekt, met name omdat deze sterk is gerelateerd aan de bodemkaart. Dit maakt het moeilijk om Gt's een-

Marc F.P. Bierkens is werkzaam bij DLO-Staring Centrum, Postbus 125, 6700 AC Wageningen, telefoon (0317) 47 42 41, fax (0317) 42 48 12, e-mail: bierkens@sc.dlo.nl.

duidelijk te interpreteren in termen van hydrologische regimes. Het belangrijkste en meest algemene bezwaar van het Gt-concept is dat het is gebaseerd op de behoefte het ruimtelijk en temporeel gedrag van de grondwaterstand te kunnen samenvatten op een papieren kaart. Met de opkomst van de computer is het nu echter mogelijk om het ruimtelijk en temporeel gedrag van de grondwaterstanden zelf te voorspellen, op te slaan en te presenteren. Daarom is de laatste jaren bij het DLO-Staring Centrum onderzoek gedaan naar alternatieve methoden om de ruimtelijke en temporele variatie van het freatisch vlak te beschrijven. Het onderzoek moet resulteren in methoden waarmee het mogelijk is om op elke onbezochte locatie een grondwaterstandsreeks te voorspellen. Al naar gelang het doel of de behoefte kunnen dan afgeleide maten van ruimtelijke of temporele variatie worden berekend uit de voorspelde grondwaterstandsreeksen, zoals Gt-kaarten, maar ook durlijnen of overschrijdingskansen. Verder kunnen de voorspelde (ruimtelijke) grondwaterstandsreeksen als invoer dienen voor andere modelstudies, bijvoorbeeld voor uitpoelingsmodellen of ecologische standplaatsmodellen.

Een voor de hand liggende manier om het ruimtelijk en temporeel gedrag van de grondwaterstand te beschrijven is het gebruik van een grondwaterstromingsmodel, zoals dat gebouwd kan worden met MODFLOW of Micro-FEM. De ruimtelijke variatie van ondiepe grondwaterspiegels wordt echter sterk bepaald door de eigenschappen van de onverzadigde zone en, met name in Nederland, door het oppervlaktewatersysteem. De meeste grondwaterstromingsmodellen ontberen de resolutie om de onverzadigde zone en het oppervlaktewatersysteem in voldoende detail mee te nemen. Ze zijn derhalve niet in staat om de grondwaterstand te voorspellen met een nauwkeurigheid die voldoende is voor landbouwkundige en ecologische toepassingen (standaardfout kleiner dan 20 cm). Zelfs als een grondwaterstromingsmodel zou worden gebouwd dat voldoet aan de eisen van nauwkeurigheid en resolutie, dan vraagt zo'n model een enorme hoeveelheid invoergegevens en reken-tijd. Dit maakt een dergelijk model niet erg geschikt om in een kort tijdsbestek en tegen redelijke kosten de grondwaterstandsfluctuaties met voldoende nauwkeurigheid in kaart te brengen.

Als alternatief kan men gebruik maken van eenvoudige modellen die de grondwaterstands-fluctuatie of de interactie tussen grondwater en bodemwater op één locatie beschrijven. Dergelijke modellen hebben als invoer alleen meteorologische gegevens nodig en gegevens over de lokale bodemopbouw en het lokale drainagesysteem. In Nederland zijn veel boorbeschrijvingen van de bodemopbouw aanwezig, variërend van 2 per ha tot 1 per 7 ha. Op al deze locaties kunnen deze eenvoudige modellen worden toegepast om tijdreeksen van grondwaterstanden te voorspellen of te simuleren. Een volledige ruimte-tijdbeschrijving van de grondwaterstand volgt door de voorspelde of gesimuleerde grondwaterstanden voor elk tijdstip te interpoleren. Als op een locatie slechts gedurende een korte periode grondwaterstanden gemeten zijn, kunnen dergelijke modellen ook gebruikt worden om langjarige reeksen van grondwaterstanden te simuleren (Knotters en Van Walsum, 1997). Op deze wijze kunnen kunstwerken worden ontworpen op basis van grondwaterstanden die representatief zijn voor het heersende klimaat in plaats van voor de beperkte meetperiode.

Een-dimensionale modellen om grondwaterstandsfluctuaties te beschrijven kunnen variëren tussen empirische modellen zoals transfer-ruis modellen (Gehrels e.a., 1994; Van Geer en Zuur, 1997; Knotters en Van Walsum, 1997) en fysisch-mechanistische modellen zoals SWATRE (Belmans e.a., 1983). Het nadeel van empirische modellen is dat ze niet goed in staat zijn voorspellingen te doen in het geval dat het karakter van het hydrologisch systeem verandert. Het nadeel van fysisch-mechanistische modellen is dat ze vaak nogal

ingewikkeld zijn waardoor resultaten moeilijk zijn te interpreteren, dat ze vaak niet erg robuust zijn en dat ze veel invoergegevens nodig hebben.

Dit artikel vormt het eerste uit een serie van twee, waarin twee eenvoudige stochastische modellen worden geïntroduceerd om grondwaterstandsfluctuaties op een enkele locatie te beschrijven. Beide modellen staan ergens tussen een empirisch en mechanistisch model in. Enerzijds behoeven ze relatief weinig invoergegevens en rekentijd en zijn ze eenvoudig van structuur, zodat resultaten gemakkelijk zijn te interpreteren. Anderzijds worden in beide modellen wel essentiële dynamische aspecten van grondwaterstandsfluctuaties beschreven, zodat ze ook gebruikt kunnen worden om de effecten van lokale ingrepen – bijvoorbeeld in het drainagesysteem binnen de afwateringseenheid waartoe de locatie behoort – in de waterhuishouding te voorspellen. In dit artikel, het eerste, wordt een model besproken dat is gebaseerd op een differentiaalvergelijking die kan worden afgeleid onder de aanname van een evenwichtsvochtprofiel. Mede door deze aanname is dit model voornamelijk geschikt voor ondiepe grondwaterstanden (Gt's I-V). In het tweede artikel (Bierkens en Walvoort, 1998) wordt een model besproken dat is verkregen door het bodemmodel van Zwamborn (1995) (zie ook Gehrels, 1995) te koppelen aan het analytische grondwatermodel van Kraijenhoff van de Leur (1958). Dit model is ook geschikt voor diepere grondwaterstanden. Om onzekerheden ten gevolge van modelveronderstellingen en modelinvoer te verdisconteren worden beide modellen uitgebreid met een ruisproces. Hierdoor resulteren stochastische modellen, waarmee niet alleen voorspellingen kunnen worden gedaan maar ook de onzekerheid van deze voorspellingen kan worden gekwantificeerd. Momenteel wordt in het Waterschap Meppelerdiep onderzocht in hoeverre wij met deze modellen in staat zijn de grondwaterstand(sdiepte) zowel in de ruimte als in de tijd te voorspellen.

Modelontwikkeling

Een differentiaalvergelijking voor grondwaterstandsfluctuaties

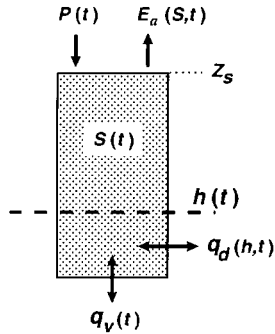
In deze paragraaf wordt een differentiaalvergelijking voor de grondwaterstand afgeleid, waarbij rekening wordt gehouden met de onverzadigde zone, zonder dat hierbij Richards' vergelijking wordt opgelost. Figuur 1 geeft een schematische voorstelling van het te modelleren bodem-grondwatersysteem op een enkele locatie. De volgende termen worden onderscheiden:

- z_s : maaiveldshoogte [L];
 $h(t)$: grondwaterstand op tijdstip t [L];
 $S(t)$: de gemiddelde verzadigingsgraad van de bodem op tijdstip t [-]. Deze is gedefinieerd als:

$$S(t) = \frac{1}{z_s - h(t)} \int_{h(t)}^{z_s} \left[\frac{\theta(z,t) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right] dz \quad (1)$$

waar

- z : de hoogte in het bodemprofiel t.o.v. z_s [L];
 $\theta(z,t)$: volumetrische vochtgehalte op hoogte z en tijdstip t [-];



Figuur 1: Schematische voorstelling van het bodem-grondwatermodel.

- θ_s : vochtgehalte bij verzadiging [-];
 θ_r : residuele vochtgehalte [-];

- $P(t)$: neerslag op tijdstip t [LT^{-1}];
 $E_a(S,t)$: actuele evapotranspiratie op tijdstip t [LT^{-1}].

We nemen aan dat de actuele evapotranspiratie afhangt van de gemiddelde verzadigingsgraad volgens:

$$E_a(S,t) = F_c E_r(t) [S(t)]^c \quad (2)$$

met

- $E_r(t)$: referentieverdamping op tijdstip t [LT^{-1}], berekend volgens Makkink (1960).
 c : een constante [-]. Deze is ongeveer 0.5 voor begroeide bodems (Lowry, 1959);
 F_c : gewasfactor [-]; ongeveer 1 voor 'standaard' grasland (Feddes, 1987);
 $q_v(t)$: regionale kwel/infiltratieflux van/naar het diepere grondwatersysteem op tijdstip t [LT^{-1}];
 $q_d(h,t)$: lokale flux op tijdstip t van/naar het oppervlaktewatersysteem [LT^{-1}].

Als meerdere 'orden' van waterlopen of ontwateringsmiddelen aanwezig zijn, zoals wateringen, sloten, greppels en drains, worden de fluxen naar de verschillende orden apart berekend en opgeteld. Dus in het geval van m_d orden, met $q_{d_i}(h,t)$ de lokale flux van/naar orde i , wordt de totale flux berekend als:

$$q_d(h,t) = \sum_{i=1}^{m_d} q_{d_i}(h,t) \quad (3)$$

Elk van deze fluxen wordt gemodelleerd als:

$$q_{d,i}(h,t) = \frac{h(t) - H_i(t)}{\gamma_i} \quad (4)$$

met

- $H_i(t)$: de drainagebasis van waterlopen van orde i op tijdstip t [L];
 γ_i : de drainageweerstand, welke hier is gedefinieerd als de weerstand die de stroming ondervindt tussen de gemodelleerde locatie en de waterlopen van orde i [T];

Voor hogere-orde waterlopen is de drainagebasis gelijk aan het gehandhaafde of gereali-seerde peil. Voor ontwateringsmiddelen die droog kunnen vallen, zoals greppels en drains wordt het drainageniveau gelijk gesteld aan de hoogte van de bodem van de greppel of de drainhoogte. Deze ontwateringsmiddelen draineren het grondwater als de grondwaterstand hoger is dan hun drainageniveau en zijn inactief als de grondwaterstand lager is.

Uit het opstellen van de massabalans voor het systeem van figuur 1 volgt de volgende diffe-rentiaalvergelijking:

$$\left[\varepsilon_0 + (\theta_s - \theta_r) \right] \frac{d h}{d t} + (\theta_s - \theta_r) \frac{d \left[(z_s - h(t)) S(t) \right]}{d t} = P(t) - E_a(S,t) + q_v(t) - q_d(h,t) \quad (5)$$

De eerste term aan de linkerkant van de vergelijking is de bergingsverandering van het grondwater en de tweede term die van het bodemwater. Aan de rechterkant staan alle fluxen. De extra grondwaterberging ε_0 [-] is toegevoegd om stabiele oplossingen van (5) te garanderen wanneer de grondwaterstand aan het maaiveld komt. Deze parameter kan gezien worden als het extra bergingseffect van macroporiën en nabijgelegen maaivelds-depressies.

Om (5) op te lossen in termen van de grondwaterstand alleen, moeten we een eenduidige relatie zoeken tussen de grondwaterstand en de gemiddelde verzadigingsgraad. Dat kan door aan te nemen dat er altijd sprake is van een evenwichtsvochtprofiel. Dit is een rede-lijke aanname wanneer de grondwaterstand ondiep is. In dat geval is de onverzadigde zone klein en het bodemprofiel erg vochtig, zodat na een verandering van de grondwaterstand of na een bui zich snel een nieuw evenwichtsprofiel zal instellen. Bovendien geldt voor on-diepe grondwaterstanden dat het vochtprofiel dat behoort bij de gemiddelde grondwater-aanvulling ongeveer samenvalt met het evenwichtsvochtprofiel (Salvucci en Entekhabi, 1994). Onder deze aanname kunnen we een relatie vinden tussen de verzadigingsgraad en de grondwaterstand via het evenwichtsvochtprofiel (pF-curve):

$$S(t) \equiv S(h(t)) = \frac{1}{z_s - h(t)} \int_0^{z_s - h(t)} \left[\frac{\theta_e(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right] d\psi \quad (6)$$

met

- ψ : zuigspanning (> 0) [L];
 $\theta_e(\psi)$: het evenwichtsvochtgehalte voor gegeven ψ [-].

Het evenwichtsvochtprofiel $\theta_e(\psi)$ wordt hier gemodelleerd met het volgende Van Genuchtenmodel (Troch, 1992):

$$\theta_e(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[\frac{1}{1 + (\alpha\psi)^n} \right]^{\frac{n+1}{n}} \quad (7)$$

hierin zijn α [L^{-1}] en n [-] de Van Genuchten-parameters. Merk op dat in (7) in plaats van de exponent $(n-1)/n$ die normaal wordt gehanteerd in de Van Genuchten-relatie (Van Genuchten, 1980), de exponent $(n+1)/n$ wordt gebruikt. Dit is gedaan om de integraal in (6) analytisch te kunnen oplossen. Troch (1992) toont aan dat het evenwichtsvochtprofiel evenzo goed kan worden benaderd door (7) als door het originele Van Genuchtenmodel.

Na substitutie van (7) in (6) en het oplossen van de integraal verkrijgen we de volgende relatie tussen S en $h(t)$:

$$S(h(t)) = \frac{1}{\alpha(z_s - h(t))} \left\{ 1 + [\alpha(z_s - h(t))]^{-n} \right\}^{\frac{-1}{n}} \quad (8)$$

Door (8) te substitueren in (5) wordt na enig rekenwerk de volgende differentiaalvergelijking voor de grondwaterstand gevonden (Bierkens, 1998):

$$G(h) \frac{dh}{dt} = P(t) - E_a(S(h), t) + q_v(t) - q_d(h, t) \quad (9)$$

met $S(h)$ gegeven in (8) en $G(h)$ door

$$G(h) = \varepsilon_0 + (\theta_s - \theta_r) \left(1 - \left\{ 1 + [\alpha(z_s - h)]^n \right\}^{\frac{-n+1}{n}} \right) \quad (10)$$

De functie $G(h)$ [-] is een freatische opbrengstcoëfficiënt die kleiner wordt naarmate de grondwaterstand stijgt. Dit is logisch omdat bij ondiepere grondwaterstanden de gemiddelde verzadigingsgraad van de bodem hoger is en er dus minder ruimte voor grondwaterberging overblijft. Het limietgedrag van $G(h)$ is: $G(h \rightarrow -\infty) = \varepsilon_0 + \theta_s - \theta_r$ en $G(h \rightarrow z_s) = \varepsilon_0$. Hieruit kunnen we zien dat de extra bergingsparameter ε_0 nodig is voor een stabiele oplossing: Als de grondwaterstand aan het maaiveld komt zou de opbrengstcoëfficiënt zonder deze parameter gelijk aan nul worden. Vergelijking (9) is een gewone maar niet-lineaire differentiaalvergelijking voor de grondwaterstand, omdat de opbrengstcoëfficiënt (10) en de actuele verdamping (2) niet-lineair afhangen van de grondwaterstand. Een andere niet-lineariteit wordt veroorzaakt door greppels en drains omdat deze kunnen droogvallen als de grondwaterstand onder hun drainageniveau komt.

Bij de afleiding van (10) zijn we er vanuit gegaan dat het bodemprofiel homogeen is. Bij ondiepe grondwaterstanden is dit een redelijke aanname. Het is echter mogelijk om meerdere lagen mee te nemen door eerst het evenwichtsvochtprofiel van het meerlagenprofiel te

berekenen en dan vergelijking (7) hierop aan te passen. We werken dan met een soort effectief evenwichtsvochtprofiel.

Stochastische formulering

Vanzelfsprekend zullen voorspellingen met een model zoals vergelijking (9) nooit exact met de werkelijkheid overeenkomen. Een model is immers een eenvoudige weergave van de werkelijkheid. Verder zijn er allerlei onzekerheden in modelparameters, invoer en beginvoorwaarden die tot fouten in de modelvoorspellingen leiden. Modelvoorspellingen zijn dus behept met onzekerheid. Als het model de dynamica van het te modelleren systeem goed beschrijft en als het model juist is gekalibreerd (geen systematische fouten), is het redelijk te veronderstellen dat alle foutenbronnen gemodelleerd kunnen worden door bij het model een ongecorrleerd ruisproces op te tellen met een gemiddelde van 0. Verder verwachten we dat als dit ruisproces een optelfout is van verschillende foutenbronnen, dit bij benadering normaal verdeeld zal zijn vanwege de centrale-limietstelling (Leduc e.a., 1986). Het stochastisch model dat de grondwaterstandsfluctuatie beschrijft, alsmede de onzekerheid daarover, volgt dus uit de toevoeging van een witte-ruisproces aan vergelijking (9):

$$G(h) \frac{dh}{dt} = P(t) - E_a(S(h), t) + q_v(t) - q_d(h, t) + \sigma \xi(t) \quad (11)$$

Het proces $\xi(t)$ is een witte-ruisproces met een gemiddelde van 0. De parameter σ [LT⁻¹] is een schalingsfactor die er voor zorgt dat het toegevoegde ruisproces de juiste grootte heeft. De witte ruis in (11) is evenals $h(t)$ een continu proces. Continue witte ruis heeft, wiskundig gezien, echter een aantal nare eigenschappen (zoals een oneindig aantal omkeerpunten en een oneindige variantie). Het is het daarom noodzakelijk om het witte-ruisproces te schrijven als onafhankelijke incrementjes (verschillen) $d\beta$, van een Brownse beweging $\beta(t)$ (Gardiner, 1985): $\xi(t) dt = \beta(t + dt) - \beta(t) \equiv d\beta$. De incrementjes zijn gemiddeld gelijk aan 0 en hebben een variantie gelijk aan dt (Unny, 1984). Met deze representatie van het witte ruisproces kan (11) als volgt worden geschreven:

$$dh = a(h, t)dt + b(h)d\beta \quad (12)$$

met

$$a(h, t) = \frac{P(t) - E_a(S(h), t) + q_v(t) - q_d(h, t)}{G(h)} \quad (13a)$$

$$b(h) = \frac{\sigma}{G(h)} \quad (13b)$$

Vergelijking (12) noemt men een *stochastische differentiaalvergelijking* (SDV) en de grondwaterstand $h(t)$ een *stochastisch proces*. De oplossing van deze SDV bestaat niet uit één berekende grondwaterstand op tijdstip t maar uit de *kans* dat op tijdstip t een zekere grondwaterstand optreedt. Iets nauwkeuriger gesteld: de oplossing van de SDV (12) geeft de kansverdeling van h op tijdstip t , gegeven dat h op tijdstip t_0 gelijk is aan h_0 . Deze kansverdeling wordt symbolisch voorgesteld als: $f_h(h, t | h_0, t_0)$. Door de grondwaterstand te model-

leren door een SDV onderkennen we dat we deze niet precies kennen. De onzekerheid omtrent de werkelijke grondwaterstand wordt dus expliciet gemaakt en gekwantificeerd door middel van $f_h(h, t | h_0, t_0)$. Hoe breder deze kansverdeling, des te onzekerder zijn we over de werkelijke grondwaterstand. Uit (12) en (13b) valt te zien dat deze onzekerheid afhangt van de grootte van σ en de waarde van $G(h)$. Te zien is dat naarmate de grondwaterstand ondieper zit fouten in bijvoorbeeld de invoer (bijvoorbeeld neerslag) een groter gevolg hebben voor de grondwaterstand. Dit is plausibel omdat een ondiepe grondwaterstand heftiger reageert op de invoer en dus ook op fouten in de invoer. Zoals we later zullen zien geldt echter dat bij ondiepe grondwaterstanden de fouten minder sterk in de tijd zullen doorwerken doordat een bodem-grondwatersysteem met ondiepe grondwaterstanden slechts een gering geheugen heeft.

Stationaire oplossing

Er bestaan verschillende manieren om de oplossing $f_h(h, t | h_0, t_0)$ van de SDV te vinden (zie bijvoorbeeld Leduc e.a., 1986). Voor een niet-lineaire SDV wordt meestal gebruik gemaakt van de Fokker-Planckvergelijking (Gardiner, 1985). De Fokker-Planckvergelijking is een partiële differentiaalvergelijking die de vorm heeft van een convectie-dispersievergelijking en waarvan de oplossing gelijk is aan $f_h(h, t | h_0, t_0)$. Een quasi-analytische oplossing kan gevonden worden als we aannemen dat de invoertermen zoals neerslag, verdamping en kwel/infiltratie kunnen worden gemodelleerd als constanten plus witte ruis. Dit is natuurlijk een onwaarschijnlijke voorstelling van de werkelijkheid omdat we weten dat bijvoorbeeld in verdamping een seizoensvariatie zit. Zoals we verderop zullen zien is het is echter toch nuttig om te bekijken hoe de oplossing van de SDV er dan uit ziet.

Als de invoertermen constanten zijn plus witte ruis dan geldt dat de coëfficiënt $a(h, t)$ in (12) onafhankelijk van de tijd wordt: $a(h, t) \equiv a(h)$. Het gevolg is dat, als na enige tijd de invloed van de beginvoorwaarde $h(t_0)$ is uitgewerkt, de kansverdeling van de grondwaterstand ook onafhankelijk wordt van de tijd: $f_h(h, t | h_0, t_0) \equiv f_h(h)$. Een stochastisch proces dat hieraan voldoet wordt een stationair stochastisch proces genoemd en $f_h(h)$ de stationaire kansverdeling.

Op het eerste gezicht lijkt het onzinnig om deze stationaire kansverdeling te berekenen, omdat we weten dat de kansverdeling afhangt van de tijd van het jaar. Er worden echter wel vaker maten gebruikt die in feite een stationaire kansverdeling zijn. Als voorbeeld kan een duurlijn genoemd worden. Een duurlijn van de grondwaterstand geeft aan hoeveel dagen per jaar de grondwaterstand boven een bepaald niveau zit, zonder dat het uitmaakt wanneer dat gebeurt. Zoals we later zullen zien, kan de stationaire oplossing onder bepaalde omstandigheden gebruikt worden om een duurlijn te benaderen.

Onder de voorwaarden $h(t) \in \langle -\infty, z_s \rangle$, wordt de stationaire oplossing (Gardiner, 1985):

$$f_h(h) = \frac{N}{b^2(h)} \exp \left[2 \int_{-\infty}^h \frac{a^*(h')}{b^2(h')} dh' \right] \quad (14)$$

met

$$a^*(h, t) = a(h, t) + \frac{1}{2} b(h) \frac{db}{dh} \quad (15)$$

en N een normalisatieconstante zodat het oppervlak onder de kansverdeling gelijk is aan 1:

$$\int_{-\infty}^{z_0} f_h(h) dh = 1 \quad (16)$$

De afgeleide (db/dh) in (15) wordt gegeven in Bierkens (1998). De integralen in (14) kunnen worden opgelost met een numerieke integratiemethode.

Als de stationaire kansverdeling van de grondwaterstand eenmaal bekend is kunnen via (3), (4) en (8) ook de stationaire kansverdelingen van de lokale afvoer en de gemiddelde verzadigingsgraad worden berekend (zie Bierkens, 1998).

Niet-stationaire oplossing

In het algemeen zal men geïnteresseerd zijn in de niet-stationaire oplossing, dus de oplossing $f_h(h, t | h_0, t_0)$ waarbij de invoer van (12) gegeven wordt door gemeten reeksen van bijvoorbeeld neerslag en potentiële evapotranspiratie. Ook deze oplossing zou gevonden kunnen worden door de Fokker-Planckvergelijking, namelijk door deze numeriek op te lossen. Het is echter eenvoudiger om hiervoor gebruik te maken van stochastische simulatiemethoden. Hierbij worden een groot aantal reeksen van normaal verdeelde incrementjes $d\beta_t$ gesimuleerd met behulp van een *pseudo-random* number generator. Voor elke reeks incrementjes wordt (12) numeriek opgelost met de gemeten tijdreeksen van neerslag en potentiële evapotranspiratie als invoer. Numeriek oplossen van (12) voor een reeks incrementjes gebeurt met een speciale Runge-Kutta-methode voor SDVs (Newton, 1991). Als we 1000 reeksen van incrementjes hebben gesimuleerd, hebben we dus 1000 evenzo waarschijnlijke tijdreeksen van de grondwaterstand. Dergelijke tijdreeksen worden *realisaties* van het stochastisch proces genoemd. Omdat we nu op elk tijdstip 1000 evenzo waarschijnlijke grondwaterstanden hebben, kunnen we hieruit op elk tijdstip de kansverdeling $f_h(h, t | h_0, t_0)$ schatten.

Kalibratie van de SDV

De meeste invoertermen en parameters van de SDV kunnen worden geschat of waargenomen. De invoerreeksen neerslag en potentiële evapotranspiratie worden door het KNMI gemeten op een groot aantal lokale meteostations. Drainageniveaus van de verschillende ontwateringsmiddelen kunnen worden opgevraagd bij waterschappen of uit veldwaarnemingen worden afgeleid. De bodemfysische parameters voor relatie (7) kunnen worden afgeleid uit de Staringreeks (Wösten e.a., 1994). Eventuele fouten in de invoer en de parameters worden beschreven met het ruisproces. Een aantal parameters zijn echter moeilijker te bepalen uit waarnemingen. Deze zullen in het algemeen via kalibratie van de SDV moeten worden achterhaald. Het betreft hier met name de volgende parameters: ε_0 , γ_i ($i = 1, \dots, m_d$), q_v (in dit onderzoek constant in de tijd verondersteld) en σ^2 . Kalibratie van de SDV op waarnemingen van de grondwaterstand is wat problematischer dan de kalibratie van een deterministisch model. Bij een deterministisch model worden de te kalibreren parameters veelal gekalibreerd onder minimalisatie van de kwadratische afwijking van modelberekeningen en waarnemingen. Bij een stochastisch model hebben we niet te maken met een

enkele tijdreeks van berekende grondwaterstanden, maar met een oneindig aantal evenzo waarschijnlijke realisaties. Bovendien moeten niet alleen de 'fysische' parameters worden gekalibreerd maar ook ruisparameters zoals σ^2 . Een manier om dit te bewerkstelligen is door het stochastisch model in te bedden in een Kalmanfilter.

Bij een Kalmanfilter wordt elke tijdstap een voorspelling gedaan met het deterministische gedeelte van het model; dus met de deterministische differentiaalvergelijking (9). Laten we de grondwaterstand op tijdstip t_k aanduiden met h_k en een voorspelling ervan met het Kalmanfilter met \bar{h}_k (te zien is dat we hierbij uitgaan van discrete tijdstappen). Met het Kalmanfilter kan uit σ^2 ook berekend worden wat de variantie van de bijbehorende voorspellingsfout is: $\sigma_{v,k}^2 = \text{var}[h_k - \bar{h}_k]$. Deze variantie is groter naarmate σ^2 groter is. Als op tijdstip t_k een waarneming wordt gedaan, laten we deze y_k noemen, dan kan de voorspelling worden bijgesteld door een gewogen gemiddelde te nemen van de voorspelling en de waarneming: $\hat{h}_k = (1 - \lambda)\bar{h}_k + \lambda y_k$. De gecorrigeerde grondwaterstand \hat{h}_k wordt 'beste schatting' genoemd. Het gewicht λ hangt af van de verhouding tussen de variantie van de voorspellingsfout en de variantie van de meetfout. Als bijvoorbeeld de meetfout veel kleiner is dan de voorspellingsfout, dan krijgt de meting bijna alle gewicht en vice versa. De beste schatting \hat{h}_k wordt vervolgens gebruikt als beginvoorwaarde voor de voorspelling \bar{h}_{k+1} op tijdstip t_{k+1} . Doordat op regelmatige tijdstippen de modelvoorspellingen worden bijgesteld door waarnemingen, zullen de voorspellingsfouten van een model in een Kalmanfilter gemiddeld kleiner zijn dan die van het deterministische model op zichzelf. Voor een uitgebreide beschrijving van het Kalmanfilter wordt verwezen naar Van Geer (1987)¹.

Als het Kalmanfilter wordt toegepast voor een kalibratieperiode met N waarnemingen, dan levert dit een reeks van N zogenaamde 'innovaties' $n_k = y_k - \bar{h}_k$ op. Verder kan het Kalmanfilter voor alle tijdstippen de innovatievariantie berekenen: $\sigma_{n_k}^2 = \text{var}[n_k]$. Stel nu dat het Kalmanfilter wordt toegepast op de kalibratieperiode met de volgende vector met te kalibreren parameters: $\mu^T = (\epsilon_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m_d}, q_v, \sigma^2)$. Uit de bijbehorende innovaties en innovatievarianties $n_k(\mu), \sigma_{n_k}^2(\mu), (k = 1, \dots, N)$ kan het volgende *maximum likelihood* criterium worden opgebouwd (Schweppe, 1973):

$$J(N; \mu) = N \ln(2\pi) + \sum_{k=1}^N \sigma_{n_k}^2(\mu) + \sum_{k=1}^N \left[\frac{n_k^2(\mu)}{\sigma_{n_k}^2(\mu)} \right] \quad (17)$$

Door (17) te minimaliseren met betrekking tot de parameters μ wordt een *maximum likelihood* schatting van deze parameters verkregen. Minimalisatie van (17) is in dit onderzoek gebeurd met de 'downhill simplex-methode' (Press e.a., 1986). Het voordeel van deze methode is dat geen afgeleiden van (17) nodig zijn.

Samenvattend: uitgaande van een beginschatting van de parameters volgt een run van het Kalmanfilter voor de kalibratieperiode. Na deze run wordt het criterium (17) geëvalueerd en de parameters aangepast door het minimalisatie-algoritme. De volgende run van het Kalmanfilter-algoritme wordt dan uitgevoerd met de aangepaste set parameters. Dit

¹ Het Kalmanfilter is eigenlijk afgeleid voor lineaire modellen. De SDV (12) is echter niet-lineair. Om in het Kalmanfilter de predictievariantie op tijdstip t_k te berekenen moet het deterministische model (9) dan ook gelineariseerd worden rond de beste schatting op tijdstip t_{k-1} . Het algoritme dat zo ontstaat heet een *extended Kalmanfilter*. Bierkens (1998) geeft de details.

proces wordt net zo lang herhaald totdat de parameters (binnen een zekere marge) niet meer veranderen. De uiteindelijke set parameters is dan de *maximum likelihood* schatting.

De combinatie van (17) met een Kalmanfilter is eerder toegepast door Te Stroet (1995) om een lineair stochastisch grondwaterstromingsmodel te kalibreren. Scheppe (1973) en Te Stroet (1995) geven aan dat minimalisatie van (17) alleen een *maximum likelihood* schatting geeft als het ruisproces in (12) normaal verdeeld is en het model lineair. Hoewel deze niet-lineair is, blijkt het algoritme ook voor de SDV goed te werken.

Toepassing van de SDV op twee locaties

Beschrijving van de data

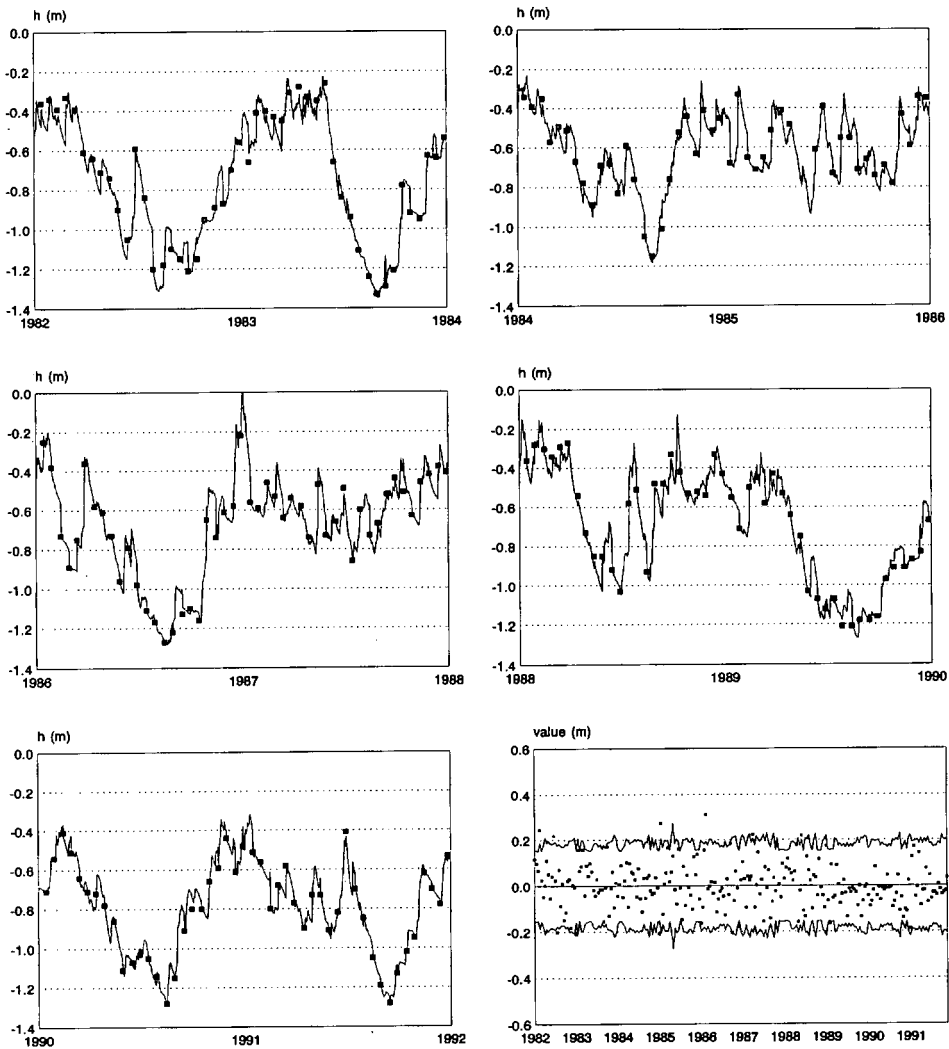
De SDV is toegepast op twee locaties in de buurt van het meteorstation Eelde. Voor deze studie zijn waarnemingsreeksen van dagelijkse neerslag en potentiële verdamping van 1962–1991 geselecteerd. Op beide locaties zijn grondwaterstandsbuizen aanwezig waar twee maal per maand de grondwaterstand is gemeten. De grondwaterstanden van 1982–1991 zijn geselecteerd voor kalibratie en validatie. Locatie 1 (buis 12e10003 volgens de TNO-codering) is een veengrond van 100 cm op matig fijn zand. De grondwaterstanden zijn hier erg ondiep (tussen 0 en 90 cm beneden maaiveld). De bodem op locatie 2 (12b10015 volgens de TNO-codering) bestaat uit lemig fijn zand. De grondwaterstanden zijn hier iets dieper (tussen 20 en 150 cm beneden maaiveld). Knotters en Van Walsum (1994) hebben voor beide locaties de bodemopbouw, alsmede de dimensies en peilen van de nabijgelegen waterlopen en greppels beschreven. De bodemfysische parameters kunnen op basis van de profielbeschrijvingen uit de Staringreeks worden afgeleid (Wösten e.a., 1994). In tabel 1 staan voor beide locaties de parameters die niet gekalibreerd worden.

Tabel 1: Parameters op locaties 1 en 2 die niet gekalibreerd worden.

	locatie 1	locatie 2
c	0,5	0,5
F_c	1,0	1,0
θ_s	0,73	0,47
θ_r	0,12	0,073
α (cm ⁻¹)	0,000434	0,000785
n	0,677	0,701
z_s (m)	0,0 m	0,0 m
H_1 (m)	-0,3 m	-0,8 m
H_2 (m)	-0,2 m	-0,5 m

Kalibratie, validatie en verificatie

Voor het valideren van het model zijn de waarnemingsreeksen van grondwaterstanden voor beide locaties gesplitst in twee perioden van vijf jaar: 1982–1986 en 1987–1991. De SDV is apart gekalibreerd voor beide deelperioden, alsmede voor de totale periode 1982–1991. De parameterwaarden die via kalibratie zijn geschat voor de drie perioden zijn gegeven in



Figuur 2: Voorspellingen (doorgetrokken lijn) met het Kalman-filter en waarnemingen (blokjes) op locatie 2; SDV gekalibreerd op periode 1982-1991; figuur rechts onderaan: innovaties (blokjes) en 2.5- en 97.5-percentielen van de innovaties (doorgetrokken lijnen).

tabel 2. Op locatie 2 is er weinig verschil tussen de parameterwaarden voor de drie kalibratieperioden. Op locatie 1 zijn de verschillen groter, met name voor q_v en σ^2 . Blijkbaar is er sprake van een trend in grondwaterstanden die niet wordt verklaard door het model. Ter illustratie toont figuur 2 een run van het Kalmanfilter-algoritme voor locatie 2, waarbij de SDV is gekalibreerd voor de gehele waarnemingsperiode (1982–1991). Verder toont deze figuur de innovaties samen met hun 2.5- en 97.5-percentielen ($\pm 2 \sigma_{\eta_k}$) berekend met het Kalmanfilter. Het percentage innovaties buiten deze grenzen is 4.2. Theoretisch moet dit 5% zijn, zodat we kunnen concluderen dat het Kalmanfilter de onzekerheid van de voorspellingen goed heeft ingeschat.

Tabel 2: Parameterwaarden die zijn verkregen door kalibratie van de SDV op locaties 1 en 2 voor verschillende perioden.

locatie 1					
periode	ϵ_0	γ_1 (dagen)	γ_2 (dagen)	q_v (mm/d)	σ^2 (mm ² /d ²)
1982–1986	0,023	112	20	-1,85	22,89
1987–1991	0,063	113	19	-2,58	40,70
1982–1991	0,047	112	22	-2,26	34,63
locatie 2					
periode	ϵ_0	γ_1 (dagen)	γ_2 (dagen)	q_v (mm/d)	σ^2 (mm ² /d ²)
1982–1986	0,063	391	92	-0,21	25,45
1987–1991	0,058	328	91	-0,32	19,81
1982–1991	0,066	369	88	-0,24	23,28

Omdat bij de kalibratie van de SDV de parameters van het deterministische gedeelte simultaan worden geschat met de ruisparameter σ^2 , is het raadzaam om te kijken of het deterministische gedeelte op zichzelf ook een juiste benadering van de grondwaterstand geeft. Dit is gedaan door het deterministische model (9), na kalibratie, te vergelijken met de waarnemingen. Het model dat gekalibreerd is voor de periode 1982–1986 is vergeleken met de waarnemingen uit dezelfde periode (verificatie) en met die uit de periode 1987–1991 (validatie), en vice versa voor het model gekalibreerd voor de periode 1987–1991. Voor het model dat is gekalibreerd voor totale periode is alleen verificatie mogelijk. De volgende maten zijn berekend:

de gemiddelde voorspellingsfout (ME):

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{h}_i) \quad (18)$$

de wortel van de gemiddelde gekwadrateerde voorspellingsfout (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{h}_i)^2} \quad (19)$$

waarin N het aantal waarnemingen voorstelt, y_i meting i en \tilde{h}_i de voorspelling met het deterministische model. Het verschil $y_i - \tilde{h}_i$ wordt hier 'residu' genoemd om het te onder-

scheiden van de innovatie $y_i - \bar{h}_i$ die wordt verkregen uit het Kalmanfilter, waarin de voorspellingen op meettijdstippen worden gecorrigeerd door waarnemingen. Als het deterministische model wordt toegepast binnen het Kalmanfilter zonder dat correctie door waarnemingen plaatsvindt kunnen de 2.5- en 97.5-percentielen van de residuen worden berekend ($\pm 2 \sigma_{v,k}$).

Figuur 3 geeft de deterministische run op locatie 2 voor het model dat is gekalibreerd voor de gehele waarnemingsperiode. Verder bevat deze figuur voor deze periode de residuen en hun berekende percentielen. De breedte van het interval is een maat voor de nauwkeurigheid van de voorspellingen met het deterministische model. Het is goed te zien dat deze nauwkeurigheid afhangt van de grondwaterstand.

Tabel 3 vat de verificatie- en validatieresultaten samen in de vorm van de ME, RMSE en het percentage residuen buiten de berekende 2.5- en 97.5-percentielen. Te zien is dat voorspellingen op locatie 2 een nauwkeurigheid van 11 tot 12 cm hebben, terwijl de systematische fouten klein zijn. Nauwkeurigheden op locatie 1 zijn iets geringer (12 tot 14 cm) en systematische fouten groter, met name bij de validatie. Dit is het gevolg van de lichte dalende trend in grondwaterstanden die niet is gemodelleerd. Het is natuurlijk mogelijk om een dergelijke trend te modelleren. Bij een lineaire trend levert dit een extra parameter op die gekalibreerd moet worden.

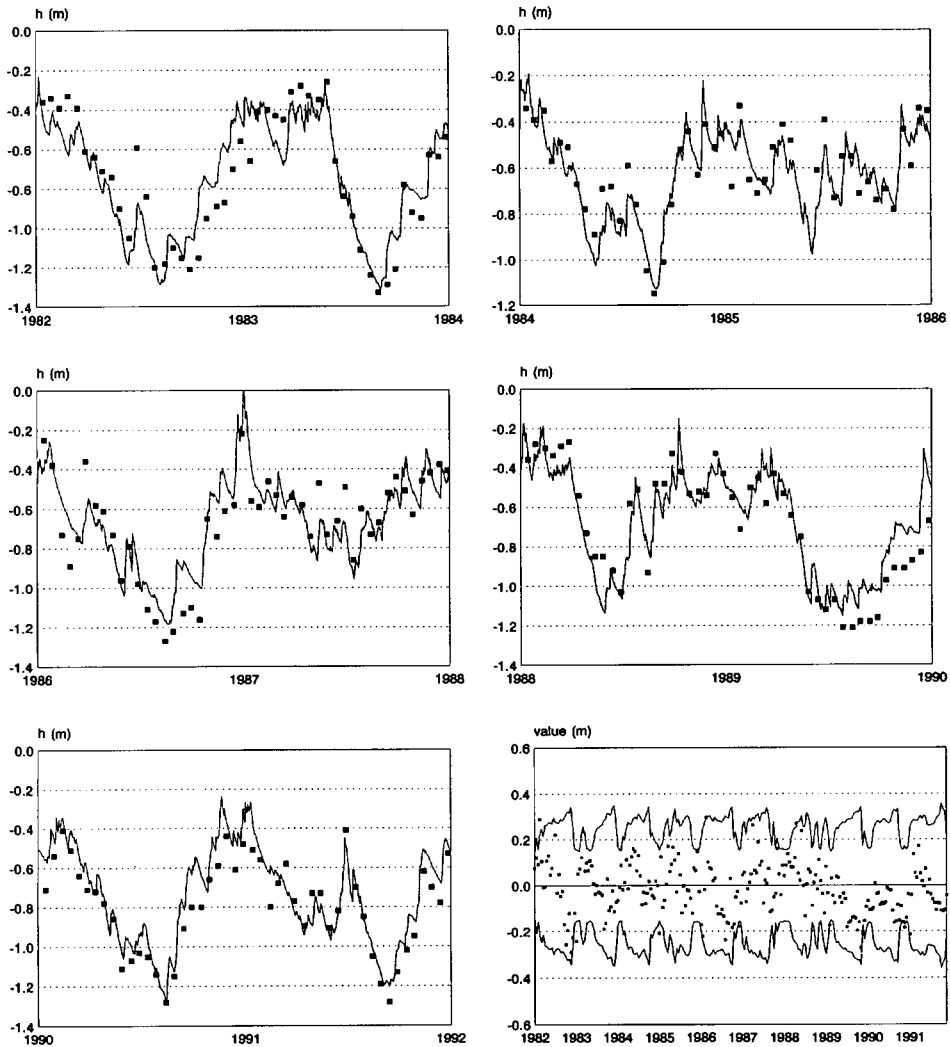
Tabel 3: Validatie- en verificatieresultaten; ME = gemiddelde voorspellingsfout (m); RMSE= de wortel van de gemiddelde kwadratische fout (m); p: percentage residuen buiten de 2.5- and 97.5-percentielen; 1: gekalibreerd op 1982-1986; 2: gekalibreerd op 1987-1991; 3: gekalibreerd op 1982-1991.

locatie 1									
	1982-1986			1987-1991			1982-1991		
	ME	RMSE	p	ME	RMSE	p	ME	RMSE	p
1	-0,006	0,108	6	-0,080	0,146	6			
2	0,066	0,128	15	-0,008	0,112	4			
3							-0,005	0,117	5

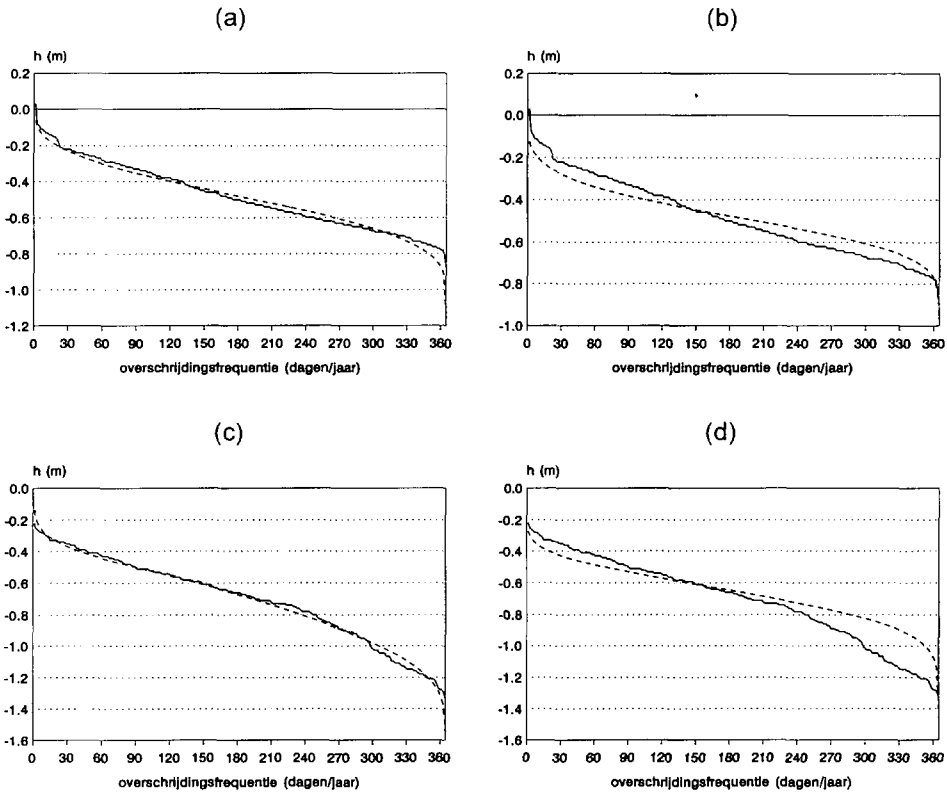
locatie 2									
	1982-1986			1987-1991			1982-1991		
	ME	RMSE	p	ME	RMSE	p	ME	RMSE	p
1	-0,009	0,121	3	-0,031	0,109	3			
2	0,011	0,122	5	-0,010	0,104	4			
3							-0,016	0,114	4

Verificatie van gereproduceerde statistieken

De SDV wordt gekalibreerd op grondwaterstanden. Hierbij wordt stilzwijgend aangenomen dat als de SDV de grondwaterstanden en de variantie van de innovaties goed beschrijft deze ook in staat is om de statistieken van de grondwaterstandsfluctuaties goed te benaderen. Om dit na te gaan zijn de statistieken berekend met de SDV vergeleken met die geschat uit waarnemingen. Met behulp van de SDVs gekalibreerd op de gehele periode (1982-1991) zijn voor beide locaties 1000 realisaties van grondwaterstandreeksen voor de periode 1982-1991 gesimuleerd. Uit deze 1000 realisaties en uit de waarnemingen zijn de volgende statistieken geschat: gemiddelde, standaardafwijking, 3^e centrale moment (een maat voor de



Figuur 3: Voorspellingen (doorgetrokken lijn) met het deterministische model en waarnemingen (blokjes) op locatie 2; SDV gekalibreerd op periode 1982-1991; figuur rechts onderaan: residuen (blokjes) en 2.5- en 97.5-percentielen van de residuen (doorgetrokken lijnen).



Figuur 4: Vergelijking van duurlijnen geschat uit waarnemingen (doorgetrokken lijnen) en berekend met de SDV (stippellijnen) voor de periode 1982-1991; (a) 1000 realisaties op locatie 1; (b) stationaire oplossing op locatie 1; (c) 1000 realisaties op locatie 2; (d) stationaire oplossing op locatie 2.

scheefheid van de kansverdeling), het 25-, 50- en 75-percentiel en de gemiddeld hoogste en gemiddeld laagste grondwaterstand (GHG en GLG). Daarnaast is voor elke locatie de duurlijn berekend uit zowel de waarnemingen als de gesimuleerde grondwaterstanden. Hier moet opgemerkt worden dat per locatie slechts één set statistieken en één duurlijn is berekend door *alle* waarnemingen (of alle gesimuleerde grondwaterstanden) achter elkaar te plakken en de statistieken en duurlijnen hieruit te schatten. Statistieken en duurlijnen reflecteren dus zowel de natuurlijke variatie van de grondwaterstand als de onzekerheid over de grondwaterstand. Men kan er ook voor kiezen om deze uit elkaar te houden (zie bijvoorbeeld Knotters en Van Walsum, 1997).

Hoewel het onwaarschijnlijk is dat de invoer van de SDV gemodelleerd kan worden door constanten plus witte ruis, is het nuttig om te zien in hoeverre we in staat zijn met de stationaire oplossing (14) de statistieken van de grondwaterstanden op beide locaties te benaderen. Hiervoor moet bij σ^2 de variantie van $P(t) - E_p(t)$ worden opgeteld. De variantie van $P(t) - E_p(t)$ geschat voor 1982-1991 voor het station Eelde is $18,77 \text{ mm}^2/\text{d}^2$. Als deze opgeteld

Tabel 4: Vergelijking van statistieken van de grondwaterstand (in m) voor de periode 1982–1991; waarn.: geschat uit de waarnemingen (waarn.); sim.: geschat uit 1000 realisaties; stat.: berekend met de stationaire oplossing (14).

Locatie 1			
	waarn.	sim.	stat.
gemiddelde	-0,484	-0,487	-0,477
stand. afw.	0,183	0,178	0,139
derde centr. moment	0,00190	0,000661	0,000179
P25	-0,64	-0,613	-0,573
P50	-0,51	-0,484	-0,480
P75	-0,33	-0,356	-0,384
GHG	-0,202	-0,212	-
GLG	-0,712	-0,764	-
Locatie 2			
	waarn.	sim.	stat.
gemiddelde	-0,706	-0,712	-0,659
stand. afw.	0,270	0,256	0,175
derde centrale moment	-0,00833	-0,0123	-0,00163
P25	-0,90	-0,901	-0,777
P50	-0,67	-0,677	-0,649
P75	-0,51	-0,499	-0,530
GHG	-0,367	-0,346	-
GLG	-1,085	-1,103	-

wordt bij de gekalibreerde σ^2 leidt dit tot een totale ruisvariantie van 53,40 mm²/d² voor locatie 1 en 42,05 mm²/d² voor locatie 2.

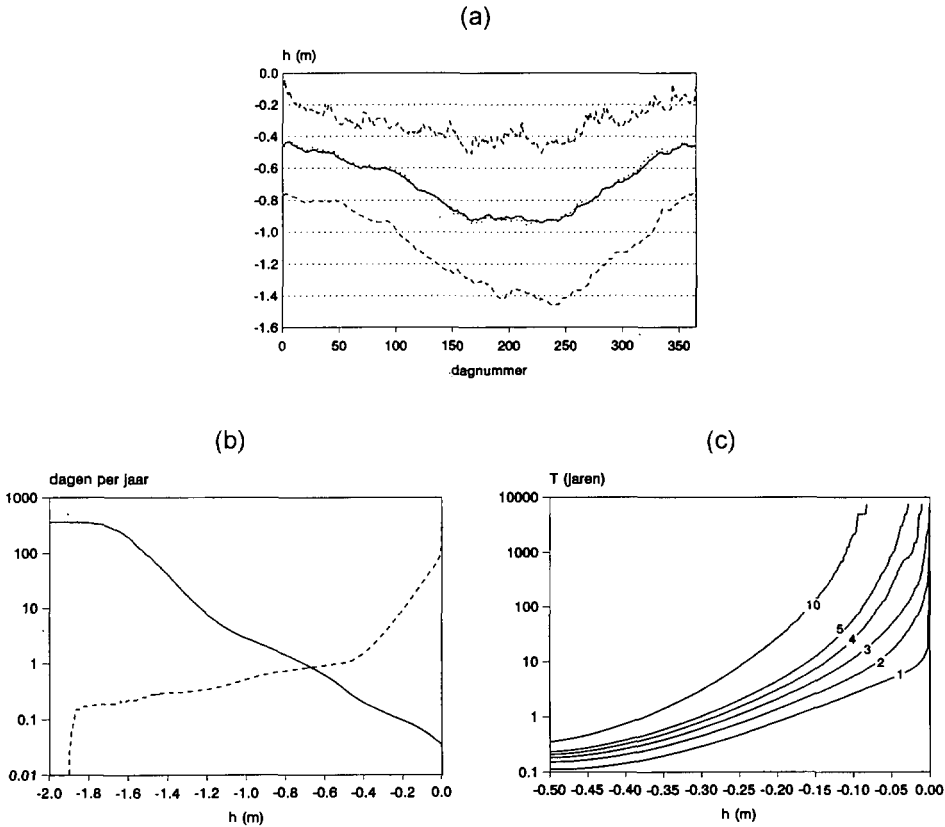
De statistieken die zijn geschat uit waarnemingen en simulaties en de statistieken die zijn berekend met de stationaire oplossing zijn weergegeven in tabel 4. Figuur 4 toont de bijbehorende duurlijnen. De tabel en de figuur laten zien dat de statistieken en duurlijnen van de waarnemingen goed worden benaderd door de statistieken en duurlijnen die geschat zijn uit de 1000 realisaties. De stationaire oplossing onderschat de variatie op locatie 2 maar geeft goede resultaten op locatie 1. Dit komt omdat de grondwaterstand op locatie 1 een klein geheugen heeft zodat de benadering van de invoer door een constante plus witte ruis een vergelijkbare variatie in grondwaterstanden oplevert als de echte invoer. We kunnen dus concluderen dat de stationaire oplossing voor snel reagerende systemen, i.c. zeer ondiepe grondwaterstanden en een ondiep drainagesysteem (denk aan natte natuurgebieden), een goede benadering van de duurlijn kan geven. Als de SDV eenmaal is gekalibreerd op een grondwaterstandsbuis, dan kan vergelijking (14) worden gebruikt om snel (zonder simulaties) op locaties in de buurt duurlijnen te berekenen, mits die alleen verschillen in bodemopbouw of bodemgebruik.

Als de SDV gekalibreerd is, kan deze gebruikt worden om op dagbasis reeksen van grondwaterstanden te genereren die veel langer zijn dan de lengte van de kalibratiereeks. Knotters en Van Walsum (1997) gebruiken dit principe om de GHG en GLG te schatten die representatief zijn voor het heersende klimaat, in plaats van voor de weersomstandigheden gedurende de waarnemingsperiode. Voor beide locaties geldt dat we met de SDV die is gekalibreerd op 10 jaar van halfmaandelijke waarnemingen, reeksen van 30 jaar met dagelijkse grondwaterstanden, en eventueel verzadigingsgraad en afvoeren, kunnen genereren. Deze gegenereerde reeksen kunnen gebruikt worden voor het ontwerp van kunstwerken en het vaststellen van waterbeheer. Ontwerp en waterbeheer zijn daardoor gebaseerd op de dagelijkse variatie en representatief voor het heersende klimaat, in plaats van voor het toevallige weerbeeld tijdens de waarnemingsperiode. Ook kan het effect van lokale ingrepen op de waterhuishouding of veranderende klimatologische omstandigheden gemakkelijk worden geanalyseerd. Omdat het mogelijk is met de SDV een groot aantal realisaties te simuleren, kan het ontwerpproces of het evalueren van een beheerstrategie direct worden onderbouwd met een risico-analyse.

Ter illustratie zijn op locatie 2, met de SDV die is gekalibreerd voor de periode 1982–1991, 500 realisaties van 30 jaar (1962–1991) dagelijkse grondwaterstanden, gemiddelde verzadigingsgraad en afvoeren gesimuleerd. In Figuur 5 worden een aantal maten van grondwaterstandsvariatie getoond die zijn geschat uit de 500 gesimuleerde reeksen. Deze maten hebben gemeen dat ze moeilijk zijn te berekenen uit de waarnemingen, hetzij omdat de waarnemingsreeks te kort is, of omdat men er grondwaterstanden op dagbasis voor nodig heeft. Figuur 5a toont een regimecurve. Deze geeft voor elk dagnummer de kansverdeling van de grondwaterstand door middel van het gemiddelde, de mediane waarde, alsmede de 2.5- en 97.5-percentielen. Figuur 5b geeft het verwachte aantal aaneengesloten dagen per jaar dat de grondwaterstand een zeker niveau overschrijdt of onderschrijdt. Figuur 5c geeft overschrijdingsduren in combinatie met herhalingscycli; bijvoorbeeld de grondwaterstand overschrijdt het niveau van 0,25 gemiddeld 1 keer per 10 jaar gedurende 10 of meer aaneengesloten dagen. Dit soort maten geven informatie die ontbreekt bij een gewone duurlijn, zoals het aantal aaneengesloten dagen dat een overschrijding plaatsvindt en hoe de overschrijdingskans verandert gedurende het jaar. Vanzelfsprekend kunnen dergelijke maten ook worden berekend voor de verzadigingsgraad en de afvoer en eventuele andere termen van de waterbalans, zoals de grondwateraanvulling en de actuele verdamping.

Samenvatting en conclusies

In dit artikel is een eenvoudig stochastisch model afgeleid om de fluctuaties van ondiepe grondwaterstanden op een locatie te beschrijven. Het model bestaat uit een stochastische differentiaalvergelijking (SDV) die kan worden afgeleid door een evenwichtsvochtprofiel te veronderstellen. De oplossing van een dergelijke SDV geeft voor elk tijdstip de kansverdeling van de grondwaterstand, en daarvan afgeleid de kansverdelingen voor de gemiddelde verzadigingsgraad van de bodem en de lokale afvoerintensiteit. Voor het geval dat de invoer van de SDV wordt gemodelleerd als een constante plus witte ruis is deze kansverdeling onafhankelijk van de tijd en quasi-analytisch te berekenen (stationaire oplossing). Als een



Figuur 5: Voorbeelden van maten van grondwaterstandsfluctuatie geschat uit 500 realisaties voor de periode 1962–1991 op locatie 2; SDV gekalibreerd op 1981–1991; (a) regimecurve; (b) verwachte aantal aaneengesloten dagen dat de grondwaterstand een zeker niveau overschrijft (doorgetrokken lijn) en onderschrijft (stippellijn); (c) herhalings tijd (T) waarmee de grondwaterstand een zeker niveau gedurende 1, 2, 3, 4, 5 en 10 of meer aaneengesloten dagen overschrijft.

gedeelte van de invoer, zoals neerslag en potentiële verdamping, bestaat uit gemeten tijdreeksen, kunnen de kansverdelingen worden afgeleid uit stochastische simulatie. De SDV kan worden gekalibreerd op waarnemingen (2 per maand) van de grondwaterstand met behulp van de combinatie van een Kalmanfilter en een *maximum likelihood* criterium.

De SDV is gekalibreerd en gevalideerd op twee locaties waar 10 jaar waarnemingen van de grondwaterstand beschikbaar waren. Met het deterministische gedeelte van de SDV wordt de grondwaterstand op deze locaties voorspeld met een nauwkeurigheid (RMSE) die varieert tussen 11 en 14 cm. Statistieken en duurlijnen van het grondwaterstandsverloop die zijn geschat uit stochastische simulaties met de gekalibreerde SDV komen goed overeen met statistieken en duurlijnen van de waarnemingen. De duurlijnen en statistieken van zeer ondiepe grondwaterstanden kunnen worden benaderd met de stationaire oplossing.

Als de SDV eenmaal is gekalibreerd op een korte meetreeks van grondwaterstanden kan deze worden gebruikt om een groot aantal langjarige realisaties van dagelijkse grondwaterstanden, gemiddelde verzadigingsgraad en lokale afvoeren te simuleren. Deze kunnen vervolgens worden gebruikt voor het ontwerpen van kunstwerken en het vaststellen van waterbeheer, eventueel aangevuld met een risico-analyse. Hierbij kan ook het effect van lokale ingrepen worden geanalyseerd.

Het ligt in de bedoeling om de SDV te gaan gebruiken als basis voor de tijd-ruimtemodelering van grondwaterstanden en het berekenen van gebiedsafvoeren. In het tweede artikel wordt hier verder op ingegaan.

Lijst van symbolen

$a(h,t)$:	coëfficiënt van de stochastische differentiaalvergelijking [LT ⁻¹]
$a(h)$:	coëfficiënt van de stationaire stochastische differentiaalvergelijking [LT ⁻¹]
$b(h)$:	coëfficiënt van de stochastische differentiaalvergelijking [LT ⁻¹]
c	:	constante in relatie tussen potentiële en actuele evapotranspiratie [-]
$E_a(S,t)$:	actuele evapotranspiratie [LT ⁻¹].
$E_r(t)$:	referentieverdamping [LT ⁻¹]
$f_h(h,t h_0,t_0)$:	kansverdeling van de grondwaterstand gegeven de beginvoorwaarden [-]
$f_h(h)$:	stationaire kansverdeling van de grondwaterstand
F_c	:	gewasfactor in relatie tussen potentiële en actuele evapotranspiratie [-]
$G(h)$:	specifieke freatische opbrengstcoëfficiënt [-]
$h(t)$:	grondwaterstand ten opzichte van maaiveld [L]
\bar{h}_k	:	voorspelling van de grondwaterstand met het Kalmanfilter [L]
\hat{h}_k	:	beste schatting van de grondwaterstand met het Kalmanfilter [L]
\tilde{h}_k	:	voorspelling van de grondwaterstand met het deterministische model [L]
$H_i(t)$:	drainagebasis van waterlopen van orde i [L]
$J(N,\mu)$:	maximum likelihood criterium [-]
k	:	indicator van discrete tijdstap [-]
m_d	:	aantal orden van waterlopen of ontwateringsmiddelen [-]
n	:	van Genuchten-parameter [-]
n_k	:	innovatie $y_k - \bar{h}_k$ van het Kalmanfilter [L]
N	:	aantal waarnemingen van de grondwaterstand in de kalibratieperiode [-]
N	:	normalisatieconstante van stationaire kansverdeling [-]
$P(t)$:	neerslag [LT ⁻¹]
$q_d(h,t)$:	totale lokale flux van/naar het oppervlaktewatersysteem [LT ⁻¹]
$q_{d_i}(h,t)$:	lokale flux van/naar waterlopen van orde i [LT ⁻¹]
$q_v(t)$:	regionale kwel/infiltratie flux van/naar het diepere grondwatersysteem [LT ⁻¹]
$S(t)$:	gemiddelde verzadigingsgraad van de bodem [-]
t	:	tijd [T]

y_k	:	waarneming van de grondwaterstand [L]
z	:	hoogte in het bodemprofiel t.o.v. maaiveld [L]
z_s	:	maaiveldshoogte [L]
α	:	Van Genuchten parameter [L ⁻¹]
$\beta(t)$:	Brownse beweging [-]
$d\beta_t$:	increment van Brownse beweging [-]
γ_i	:	drainageweerstand voor lokale flux van/naar waterlopen van orde i [T]
ε_0	:	extra grondwaterberging [-]
$\theta(z,t)$:	(volumetrisch) vochtgehalte [-]
$\theta_e(\psi)$:	evenwichtsvochtprofiel [-]
θ_r	:	residuele vochtgehalte [-]
θ_s	:	vochtgehalte bij verzadiging [-]
λ	:	gewicht in Kalmanfilter-algoritme [-]
μ	:	vector met te kalibreren parameters
$\xi(t)$:	(continu) witte-ruisproces [-]
σ^2	:	variantie van de ruis van de SDV [L ² T ⁻²]
$\sigma_{v,k}^2$:	variantie van de voorspellingsfout $h_k - \bar{h}_k$ van het Kalmanfilter [L ²]
$\sigma_{n_k}^2$:	variantie van de innovatie $y_k - \bar{h}_k$ van het Kalmanfilter [L ²]
ψ	:	zuigspanning (> 0) [L]

Literatuur

- Belmans, C., J.G. Wesseling en R.A. Feddes (1983)** Simulation of the water balance of a cropped soil: SWATRE; in: *Journal of Hydrology*, nr 63, pag 271–286.
- Bierkens, M.F.P. (1998)** Modeling water table fluctuations by means of a stochastic differential equation (aangeboden aan *Water Resources Research*).
- Bierkens, M.F.P. en Walvoort (1998)** Eenvoudige stochastische modellen voor grondwaterstandsfluctuaties, deel 2: Gecombineerd bodem-grondwatermodel met stochastische invoer; in: *Stromingen*, jrg 4, nr 3 (volgend nummer).
- Feddes, R.A. (1987)** Crop factors in relation to Makkink reference-crop evapotranspiration; Verslagen en Mededelingen 39, Commissie voor Hydrologisch Onderzoek TNO, pag 33–45, 's-Gravenhage.
- Gardiner, C.W. (1985)** Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and Natural Sciences, second edition; Springer Verlag, Berlin.
- Geer, F.C. van (1987)** Applications of Kalman filtering on the analysis and design of groundwater monitoring networks; Proefschrift, Technische Universiteit Delft, Delft.
- Geer, F.C. van en A.F. Zuur (1997)** An extension of Box-Jenkins transfer/noise models for spatial interpolation of groundwater head series; in: *Journal of Hydrology*, nr 192, pag 65–80.
- Gehrels, J.C. (1995)** Niet-stationaire grondwatermodellering van de Veluwe. Een studie naar de invloed van de grondwaterwinning, inpoldering en verloofing op de grondwaterstand sinds 1951; rapport Vrije Universiteit, Amsterdam.
- Gehrels, J.C., F.C. van Geer en J.J. de Vries (1994)** Decomposition of groundwater level fluctuations using transfer modelling in an area with shallow to deep unsaturated zones; in: *Journal of Hydrology*, nr 157, pag 105–138.

- Genuchten, M.Th. van (1980)** A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils; in: *Soil Science Society of America Journal* 44, pag 892–898.
- Heesen, H.C. van (1970)** Presentation of the seasonal fluctuation of the water table depth on soil maps; in: *Geoderma* 4, pag 257–278.
- Knotters, M. en P.E.V. van Walsum (1994)** Uitschakeling van weersinvloeden bij de karakterisering van het grondwaterstandsverloop; rapport 350, DLO-Staring Centrum, Wageningen.
- Knotters, M. en P.E.V. van Walsum (1997)** Estimating fluctuation quantities from time series of water table depths using models with a stochastic component; in: *Journal of Hydrology*, nr 197, pag 25–46.
- Kraijenhoff van de Leur, D.A. (1958)** A study of non-steady groundwater flow with special reference to a reservoir-coefficient; in: *De Ingenieur* 70, nr 19, pag 87–94.
- Leduc, R, T.E. Unny en E.A. McBean (1986)** Stochastic model of first-order BOD kinetics; in: *Water Research*, jrg 20, nr 5, pag 625–632.
- Lowry, W.P. (1959)** The falling rate phase of evaporative soil moisture loss: A critical evaluation; in: *Bulletin of the American Meteorological Society* 40, pag 605.
- Makkink, G.F. (1960)** De verdamping uit vegetaties in verband met de formule van Penman; Verslagen en Mededelingen 4, Commissie voor Hydrologisch Onderzoek TNO, pag 90–115, 's-Gravenhage.
- Newton, N.J. (1991)** Asymptotically efficient Runge-Kutta methods for a class of Itô and Stratonovich equations; in: *SIAM Journal of Applied Mathematics*, jrg 51, nr 2, pag 542–567.
- Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky en W.T. Vetterling (1986)** Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing; Cambridge University Press, Cambridge.
- Salvucci, G.D. en D. Entekhabi (1994)** Equivalent steady soil moisture profile and the time compression approximation in water balance modeling; in: *Water Resources Research*, jrg 30, nr 10, pag 2737–2749.
- Schweppe, F.C. (1973)** Uncertain Dynamic Systems; Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Stroet, C.B.M. te (1995)** Calibration of Stochastic Groundwater Flow Models: Estimation of System Noise Statistics and Model Parameters; Proefschrift, Technische Universiteit Delft, Delft.
- Troch, P.A. (1992)** Conceptual basin-scale runoff process models for humid catchments: Analysis, synthesis and applications; proefschrift, Universiteit Gent, Gent, België.
- Unny, T.E. (1984)** Numerical Integration of stochastic differential equations in catchment modeling; in: *Water Resources Research*, jrg 20, nr 3, 360–368.
- Werkgroep Gt-Onderzoek (1991)** Huidig & toekomstig onderzoek naar aspecten van de ruimtelijke en temporele variabiliteit van het freatisch grondwaterniveau; Staring Centrum, Interne Mededeling 142, Wageningen.
- Wösten, J.H.M., G.J. Veerman en J. Stolte (1994)** Waterretentie- en doorlatendheidskarakteristieken van boven- en ondergronden in Nederland: de Staringreeks, vernieuwde uitgave; Technisch document 18, DLO-Staring Centrum, Wageningen.
- Zwamborn, M.H. (1995)** Modelleren van de onverzadigde zone ten behoeve van grondwatermodellen; Kiwa rapport SWI 95.142, Nieuwegein.