
Niet-stationaire grondwaterstroming in geheld terrein met sleufdrainage

Niko E.C. Verhoest
Peter A. Troch

1 Inleiding

In dit artikel formuleren we een nieuwe analytische oplossing voor sleufgedraineerde hellingen waarbij de sleuven zich loodrecht op de helling bevinden om een optimale drainage te verzekeren. Hiertoe beschouwen we de theorie van de grondwaterstroming in een geheld terrein (figuur 1). Deze is gebaseerd op de Darcy-vergelijking zoals werd geformuleerd door Boussinesq (1877) (zie ook Childs (1971)):

$$q = -kh \left[\frac{\partial h}{\partial x} \cos i + \sin i \right] \quad (1)$$

waarbij q [L^2/T] het debiet per eenheidsbreedte voorstelt in de x -richting, k [L/T] is de verzadigde doorlatendheid, h [L] = $h(x,t)$ is de hoogte van de grondwaterspiegel loodrecht gemeten ten opzichte van de ondoorlatende laag met hellingshoek i , en x [L] is de coördinaat parallel aan de ondoorlatende laag. Indien deze vergelijking wordt gecombineerd met de continuïteitsvergelijking, waarbij geen ruimtelijke variabiliteit wordt verondersteld in k , i en de draineerbare porositeit f [-], en de grondwaterspiegel aangevuld wordt met een constante voeding N , bekomt men de Boussinesq-vergelijking voor een geheld terrein:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{f} \left[\cos i \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \sin i \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{N\varepsilon(t)}{f} \quad (2)$$

waarbij t [T] de tijd voorstelt en $\varepsilon(t)$ de eenheidstapfunctie voorstelt (m.a.w., $\varepsilon(t) = 0$ voor $t < 0$ en $\varepsilon(t) = 1$ voor $t \geq 0$). Deze vergelijking verwaarloost het effect van de capillaire opstijging boven de waterspiegel en past de uitgebreide Dupuit–Forcheimer-veronderstelling toe (Bear, 1972).

Verhoest en Troch (2000) hebben enkele analytische oplossingen van vergelijking (2) voorgesteld welke gebaseerd zijn op een linearizatie van de Boussinesq-vergelijking. Daarbij werd de methode van Brutsaert (1994) gevolgd, die een analytische oplossing heeft gevonden voor het impulsantwoord van een helling. De bekomen oplossing in dit artikel verschilt van deze gevonden door Verhoest en Troch (2000) ten gevolge van de verschillende rand-

Niko Verhoest is werkzaam bij het Laboratorium voor Hydrologie en Waterbeheer, Universiteit Gent, Coupure links 653, B-9000 Gent, België en **Peter Troch** is werkzaam bij de Leerstoel Hydrologie en Kwantitatief Waterbeheer, Wageningen Universiteit, Nieuwe Kanaal 11, 6709 AP Wageningen.

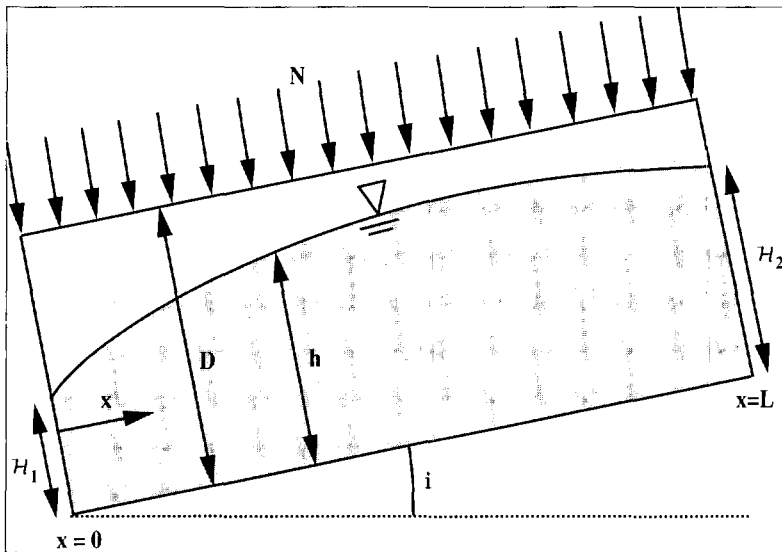
voorwaarden die opgelegd worden aan het systeem. Terwijl Verhoest en Troch (2000) een Neumann-conditie (d.i. debiet is nul) oplegden aan de top van de helling (toepasbaar voor hellingen tot aan de grondwaterscheiding) en een Dirichlet-conditie (d.i. waterspiegelhoogte is constant) ter hoogte van de rivier de waterhoogte dicteert, zijn beide randvoorwaarden bij een sleufgedraineerde helling een Dirichlet voorwaarde die de waterhoogte in de sleuven oplegt.

De randvoorwaarden worden dus gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} h &= H_1 & x &= 0 & t > 0 \\ h &= H_2 & x &= L & t > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Dit probleem werd reeds door Su (1994) aangepakt waarbij de auteur een analytische oplossing voorstelt welke gebaseerd is op de omvorming van de gelineariseerde Boussinesq-vergelijking in een warmtegeleidingsvergelijking. In dit artikel passen we enkele algemene technieken toe voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen op de gelineariseerde Boussinesq-vergelijking.

In eerste instantie wendden we een onrealistische beginvoorwaarde (constante waterspiegel-diepte) aan om de analytische vergelijking van het stationaire regime te bekomen. Dergelijk regime weerspiegelt een werkelijk grondwaterspiegelverloop tussen twee sleuven zodanig dat we deze vorm als nieuwe realistische beginvoorwaarde zullen opleggen voor het berekenen van de niet-stationaire stroming tussen twee sleuven op een geheld terrein onder een constante voeding van de grondwaterspiegel.



Figuur 1: Definitieschets van de dwarsdoorsnede van de aquifer (opmerking $L \gg D$).

2 Wiskundige afleiding

Om een wiskundige oplossing voor vergelijking (2) te bekomen, linearizeren we deze vergelijking in analogie met Brutsaert (1994) en Verhoest en Troch (2000):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{f} \left[pD \cos i \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \sin i \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{N\varepsilon(t)}{f} \quad (4)$$

waarbij de linearizatieconstante pD moet aanzien worden als een gemiddelde hoogte van de grondwaterspiegel. Algemeen geldt dat $0 < p \leq 1$. Deze constante kan best bepaald worden als een bijkomende kalibratieparameter (Brutsaert, 1994).

Als we nu $\eta = D - h$, $K = kpD \cos i / f$ en $U = k \sin i / f$ substituëren in vergelijking (4), dan wordt de gelineariseerde Boussinesq-vergelijking:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{N\varepsilon(t)}{f} \quad (5)$$

Deze partiële differentiaalvergelijking kan opgelost worden door eerst een Laplace-transformatie naar één van de veranderlijken (i.e. de tijd t) door te voeren wat resulteert in een gewone differentiaalvergelijking. Door deze laatste differentiaalvergelijking op te lossen en een inverse Laplace-transformatie van deze oplossing door te voeren bekomen we de gewenste analytische oplossing. Indien we de Laplace-transformatie van (5) wensen uit te voeren, moeten we een initiële voorwaarde opleggen. Een eerste eenvoudige benadering gaat ervan uit dat de grondwaterspiegel het maaiveld bereikt voor alle plaatsen op tijd $t = 0$, of:

$$h = D \text{ of } \eta = 0 \quad 0 < x < L \quad t = 0 \quad (6)$$

Door gebruik te maken van deze voorwaarde wordt de Laplace-getransformeerde van (5) gegeven door:

$$K \frac{d^2 F}{dx^2} + U \frac{dF}{dx} - yF = \frac{N}{fy} \quad (7)$$

waarbij F de Laplace-getransformeerde voorstelt van de grondwaterspiegeldiepte η , en y is de Laplace-variabele.

Vergelijking (7) kan nu opgelost worden met behulp van standaard technieken voor het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen waarbij we de Laplace-getransformeerde randvoorwaarden moeten aanwenden, welke gegeven worden door:

$$\begin{aligned} F &= \frac{D_1}{y} & x &= 0 \\ F &= \frac{D_2}{y} & x &= L \end{aligned} \quad (8)$$

waarbij $D_1 = D - H_1$ en $D_2 = D - H_2$.

Na enige berekeningen vindt men:

$$F = \frac{D_2 e^{-a(L-x)} \sinh(bx)}{y \sinh(bL)} - \frac{D_1 e^{ax-bL} \sinh(bx)}{y \sinh(bL)} + \frac{N e^{-a(L-x)} \sinh(bx)}{fy^2 \sinh(bL)} - \frac{N e^{ax-bL} \sinh(bx)}{fy^2 \sinh(bL)} + \frac{N(e^{(a-b)x} - 1)}{fy^2} + \frac{D_1 e^{(a-b)x}}{y} \quad (9)$$

waarbij $a = -U / 2K$ en $b = (a^2 + y / K)^{1/2}$.

De inverse Laplace-transformatie van (9) wordt bekomen door het toepassen van Bromwich's integraalformule en het residutheorem (Arfken en Weber, 1995):

$$h = H_1 - \frac{e^{-a(L-x)}(LN - 2afK(H_2 - H_1))\sinh(ax)}{2afK \sinh(aL)} + \frac{Nx}{2afK} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi(D - H_1 - (-1)^n(D - H_2)e^{-aL})e^{ax}}{a^2L^2 + n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi L^2 N e^{ax}(e^{-aL} - (-1)^n)}{fK(a^2L^2 + n^2\pi^2)^2 (-1)^n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt} \quad (10)$$

Het uittrede (of intrede) debiet per eenheidsbreedte waargenomen in beide sleuven kan dan gevonden worden door (10) in te vullen in de gelineariseerde Darcy-vergelijking, welke gegeven is door:

$$-q = kpD \cos i \frac{\partial h}{\partial x} + kh \sin i \quad (11)$$

zodat het debiet in de benedengelegen sleuf gegeven wordt door (negatief = uittredend debiet, positief = intredend debiet):

$$q_{x=0} = \frac{(1 + 2aL - e^{2aL})N + 4a^2fK(H_1 e^{2aL} - H_2)}{2a(e^{2aL} - 1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2fKn^2\pi^2((D - H_1)e^{aL} - (-1)^n(D - H_2))}{a^2L^3 + Ln^2\pi^2} e^{-aL - \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2LNn^2\pi^2(e^{aL} - (-1)^n)}{(a^2L^2 + n^2\pi^2)^2} e^{-aL - \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt} \quad (12)$$

en het debiet in de bovengelegen sleuf (negatief = intredend debiet, positief = uittredend debiet):

$$\begin{aligned}
q_{x=L} = & \frac{(1 + (2aL - 1)e^{2aL})N + 4a^2fK(H_1e^{2aL} - H_2)}{2a(e^{2aL} - 1)} \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2fKn^2\pi^2(-1)^n((D - H_1)e^{aL} - (-1)^n(D - H_2))}{a^2L^3 + Ln^2\pi^2} e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2LNn^2\pi^2(-1)^n(e^{aL} - (-1)^n)}{(a^2L^2 + n^2\pi^2)^2} e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt}
\end{aligned} \tag{13}$$

3 Oplossing voor het stationaire regime

Voor grote waarden van t zal een stabiele grondwaterspiegel ontstaan tussen beide sleuven waarbij de vorm van het freatisch oppervlak volledig bepaald wordt door de waterhoogte in de sleuven en de constante voeding van de waterspiegel. De analytische oplossing van de waterspiegelhoogtes en debieten kan bekomen worden door de tijd naar oneindig te laten naderen in vergelijkingen (10), (12) en (13) waardoor de volgende 'steady state'-oplossingen worden bekomen:

$$h = H_1 - \frac{e^{-a(L-x)}(LN - 2afK(H_2 - H_1))\sinh(ax)}{2afK \sinh(aL)} + \frac{Nx}{2afK} \tag{14}$$

$$q_{x=0} = \frac{(1 + 2aL - e^{2aL})N + 4a^2fK(H_1e^{2aL} - H_2)}{2a(e^{2aL} - 1)} \tag{15}$$

$$q_{x=L} = \frac{(1 + (2aL - 1)e^{2aL})N + 4a^2fK(H_1e^{2aL} - H_2)}{2a(e^{2aL} - 1)} \tag{16}$$

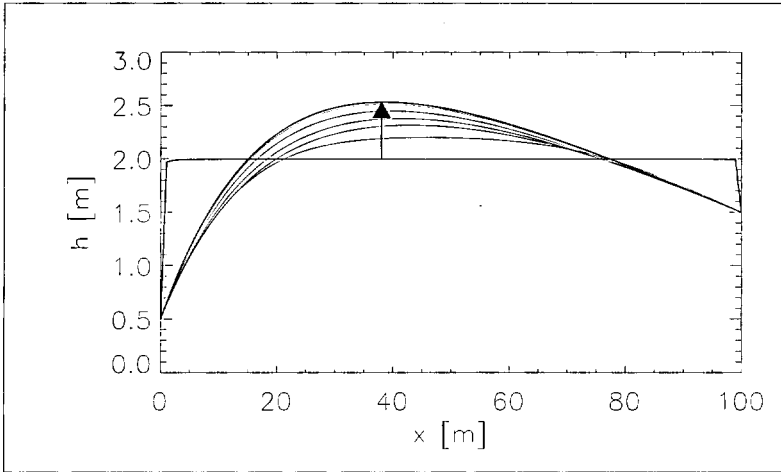
Voor deze toestand is het eenvoudig te verifiëren dat de netto hoeveelheid water welke draineert in de sleuven gelijk is aan NL , wat overeenstemt met de hoeveelheid water welke per tijdseenheid percoleert naar de grondwaterspiegel.

4 Bespreking

In het volgende voorbeeld bespreken we het resultaat van de berekening van het grondwaterpeil via vergelijking (10). Daartoe beschouwen een rechthoekige aquifer met de volgende karakteristieken: lengte $L = 100$ m, diepte tot de ondoorlatende laag $D = 2$ m, helling van de ondoorlatende laag $i = 2^\circ$, doorlatendheid $k = 0,001$ m/s, draineerbare porositeit $f = 0,34$, waterhoogte in de sleuven $H_1 = 0,5$ m en $H_2 = 1,5$ m, linearisatieconstante $p = 1/3$. De netto neerslag wordt gesteld op $N = 3$ mm/h. De doorlatendheid reflecteert de effectieve waarden relevant voor de schaal waarop wordt gewerkt, daar het gekend is dat k vergroot met toenemende observatie schaal (Troch e.a., 1993).

Figuur 2 werd bekomen door de sommatie in (10) te beperken tot de eerste 999 termen. De bijdrage van de waarden binnen het somteken convergeren naar nul voor groter wordende

n. Op het ogenblik $t = 0$ vertoont de waterspiegel de initiële conditie (nl. $h = D$), en naarmate de tijd verstrijkt zien we dat de vorm van de waterspiegel convergeert naar de vorm van het stationaire regime, gedefinieerd door (14). In dit voorbeeld is het grondwaterpeil hoger dan de maaiveldshoogte, wat in feite betekent dat het grondwater er dagzoomt. In dit geval echter zal de oplossing gedefinieerd door (10) en (13) niet het werkelijke verloop van de waterspiegel vertonen daar deze oplossing geen rekening houdt met oppervlakteafvoeren ten gevolge van kwelstroming.



Figuur 2: Niet-stationaire gedrag van de waterspiegel geobserveerd bij 0, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 en 200 dagen bij een helling van de doordoorlatende laag van 2°.

5 Nieuwe beginvoorwaarde

De initiële voorwaarde welke gekozen werd om de voorgaande vergelijkingen te bekommen is fysisch niet realistisch. Het zou beter zijn om een werkelijk optredend freatisch oppervlak zoals dat corresponderend met een stationair regime, aan te nemen als beginvoorwaarde. Indien we nu de conditie (6) vervangen door (14) voor $t = 0$, dan wordt de Laplace-getransformeerde van (5) gegeven door:

$$K \frac{d^2 F}{dx^2} + U \frac{dF}{dx} - yF = \frac{N}{fy} - D_1^* + \frac{N^* x}{2afK} + \frac{(2afK(D_1^* - D_2^*) - LN^*) e^{-a(L-x)} \sinh(ax)}{2afK \sinh(aL)} \quad (17)$$

Waarbij N^* de percolatiesnelheid en D_1^* en D_2^* de dieptes tot het waterpeil in de sleuven welke gelden bij de initiële steady state grondwaterspiegel. De oplossing van de bovenstaande differentiaalvergelijking wordt bekomen door toepassen van de nieuwe randvoorwaarden van het systeem welke gegeven worden door de nieuwe dieptes tot het water-niveau in beide sleuven:

$$\begin{aligned} \eta = D_1 & \quad \text{of} \quad F = \frac{D_1}{y} & \quad x = 0 \\ \eta = D_2 & \quad \text{of} \quad F = \frac{D_2}{y} & \quad x = L \end{aligned} \quad (18)$$

en wordt bekomen als:

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{(D_1 - D_1^*)e^{(a-b)x}}{y} + \frac{(N - N^*)e^{(a-b)x}}{fy^2} + \frac{(D_2 - D_2^*)e^{-a(L-x)} \sinh(bx)}{y \sinh(bL)} \\
 & - \frac{(D_1 - D_1^*)e^{-bL} e^{ax} \sinh(bx)}{y \sinh(bL)} + \frac{(N - N^*)(e^{-aL} - e^{-bL})e^{ax} \sinh(bx)}{fy^2 \sinh(bL)} \\
 & + \frac{(D_2^* - D_1^*)(e^{2ax} - 1)e^{-aL}}{2y \sinh(aL)} + \frac{LN^* e^{-aL}(e^{2ax} - 1)}{4afKy \sinh(aL)} - \frac{N}{fy^2} + \frac{D_1^*}{y} - \frac{N^*x}{2afKy} + \frac{N^*}{fy^2}
 \end{aligned} \tag{19}$$

De inverse Laplace-getransformeerde van de bovenstaande vergelijking wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
 h = & H_1 - \frac{e^{-a(L-x)}(LN - 2afK(H_2 - H_1)) \sinh(ax)}{2afK \sinh(aL)} + \frac{Nx}{2afK} \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi(H_1 - H_1^* - (-1)^n(H_2 - H_2^*)e^{-aL})e^{ax}}{a^2L^2 + n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi L^2(N - N^*)e^{ax}(e^{-aL} - (-1)^n)}{fK(a^2L^2 + n^2\pi^2)^2(-1)^n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Uiteindelijk wordt het debiet in de beide sleuven opnieuw bekomen door (17) in te vullen in de gelineariseerde Darcy-vergelijking:

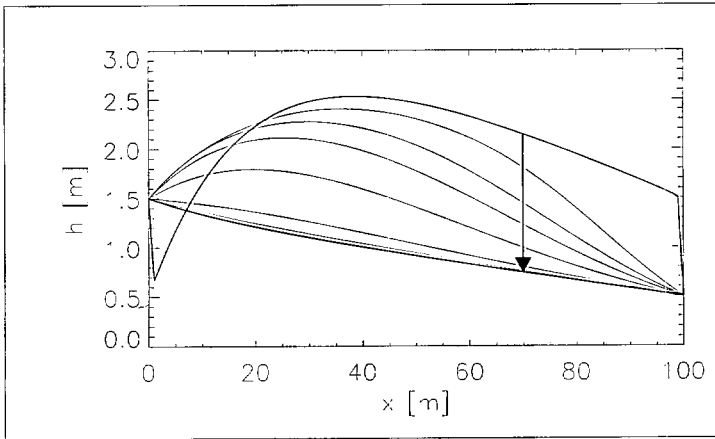
$$\begin{aligned}
 q_{x=0} = & \frac{(1 + 2aL - e^{2aL})N + 4a^2fK(H_1e^{2aL} - H_2)}{2a(e^{2aL} - 1)} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2fKn^2\pi^2(H_1 - H_1^* - (-1)^n(H_2 - H_2^*)e^{-aL})}{a^2L^3 + Ln^2\pi^2} e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(N - N^*)n^2\pi^2(1 - (-1)^n e^{-aL})}{(a^2L^2 + n^2\pi^2)^2} e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt}
 \end{aligned} \tag{21}$$

en

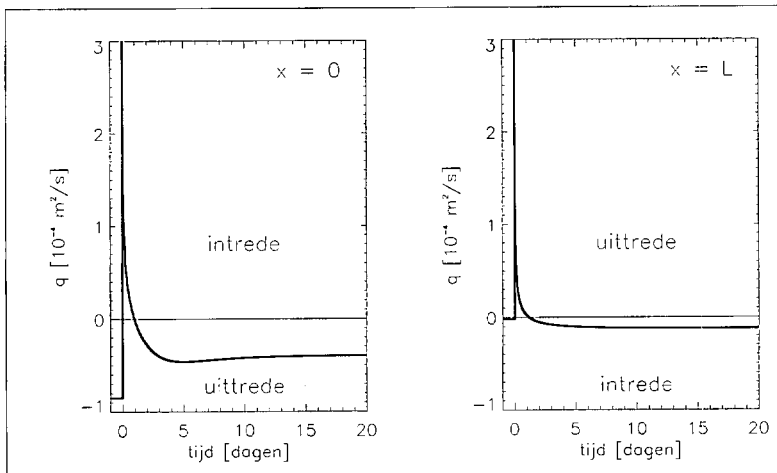
$$\begin{aligned}
 q_{x=L} = & \frac{(1 + (2aL - 1)e^{2aL})N + 4a^2fK(H_1e^{2aL} - H_2)}{2a(e^{2aL} - 1)} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2fKn^2\pi^2(-1)^n(H_1 - H_1^* - (-1)^n(H_2 - H_2^*)e^{-aL})}{a^2L^3 + Ln^2\pi^2} e^{aL - \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(N - N^*)n^2\pi^2((-1)^n - e^{aL})}{(a^2L^2 + n^2\pi^2)^2} e^{aL - \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + a^2\right)Kt}
 \end{aligned} \tag{22}$$

6 Bespreking

In figuur 3 wordt, voor dezelfde bodemkarakteristieken zoals in punt 4, de verandering weergegeven van de waterspiegel indien de nieuwe waterhoogtes in de sleuven 1,5 m en 0,5 m bedragen, terwijl een neerslagintensiteit van 1 mm/h optreedt. De initiële conditie is de waterspiegel onder stationair regime bij waterpeilen 0,5 m en 1,5 m in respectievelijk de linker en rechter sleuf en een neerslagintensiteit van 3 mm/h. Figuur 4 geeft de debieten weer die in de linker en rechter sleuf worden genoteerd. Ten gevolge van de oriëntering van de x -as, draineert het water in de sleuven bij negatieve debieten voor de linkse sleuf, en bij positieve debieten bij de rechtse sleuf. In het ander geval werkt de sleuf irrigierend.



Figuur 3: Verloop van de grondwaterspiegel geobserveerd bij 0, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 en 200 dagen, uitgaande van het stationaire regime zoals bekomen bij figuur 2, en nieuwe waterhoogtes van 1,5 m en 0,5 m respectievelijk in de linker en rechter sleuf, en een neerslagintensiteit van 1 mm/h.



Figuur 4: Verloop van de debieten geobserveerd bij 0, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 en 200 dagen voor de linker ($x = 0$) en de rechter ($x = L$) sleuf, voor het grondwaterspiegelverloop zoals weergegeven in figuur 3.

7 Conclusies

In dit artikel hebben we uitgaande van de linearisering van de Boussinesq-vergelijking analytische oplossingen van zowel de niet-stationaire als de stationaire stroming afgeleid die gelden voor sleufgedraineerde gebieden met een uniforme bodemstructuur en een zwak gehelde ondoorlatende laag waarbij de sleuf tot aan de ondoorlatende laag reikt. Er wordt zowel een analytische oplossing bekomen voor de waterspiegelhoogtes, als voor de debieten in de beide sleuven, uitgaande van een realistische vorm voor de initiële waterspiegel. In een volgend artikel worden deze oplossingen herschreven voor een horizontale ondoorlatende laag en worden ze vergeleken met een aantal gekende oplossingen voor deze situatie (Glover, 1974, Krayenhoff van de Leur, 1958).

Referenties

- Arfken, G.B. en H. J. Weber** (1995) *Mathematical methods for physicists*; Academic Press, San Diego, Californië, USA.
- Bear, J.** (1972) *Dynamics of fluids in porous media*; Dover Publications, Mineola, New York, USA.
- Boussinesq, J.** (1877) Essai sur la théorie des eaux courantes; in: *Mem. Acad. Sci. Inst. Fra.*, jrg 23, nr 1, pag 252–260.
- Brutsaert, W.** (1994) The unit response of groundwater outflow from a hillslope; in: *Water Resources Research*, jrg 30, nr 10, pag 2759–2763.
- Childs, E.C.** (1971) Drainage of groundwater resting on a sloping bed; in: *Water Resources Research*, jrg 7, nr 5, pag 1256–1263.
- Glover, R.E.** (1974) *Transient ground water hydraulics*; Water Resources Publications Colorado State University, Colorado, USA.
- Krayenhoff van de Leur, D.A.** (1958) A study of non-steady groundwater flow with special reference to a reservoir coefficient; in: *De Ingenieur*, nr 70, pag B87–B94.
- Su, N.** (1994) A formula for computation of time-varying recharge of groundwater; in: *Journal of Hydrology*, nr 160, pag 123–135.
- Troch, P.A., F.P De Troch en W. Brutsaert** (1993) Effective water table depth to describe initial conditions prior to storm rainfall in humid regions; in: *Water Resources Research*, jrg 29, nr 2, pag 427–434.
- Verhoest, N.E.C. en P. A. Troch** (2000) Some analytical solutions of the linearized Boussinesq equation with recharge for a sloping aquifer; in: *Water Resources Research*, jrg 36, nr 3, pag 793–800.