
Een kantelende brakke zone

Mark Bakker
Willem-Jan Plug
Gualbert Oude Essink

Inleiding

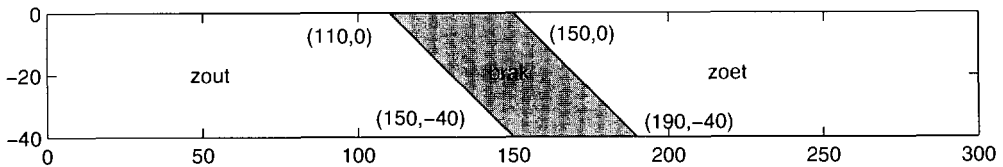
Op SWIM17, afgelopen mei 2002 in Delft, ontstond er een discussie over een hypothetisch geval van stroming van zoet, brak en zout water in een verticale doorsnede. Initieel heeft de brakke zone een constante breedte en zowel het grensvlak tussen het zoete en brakke water, als het grensvlak tussen het brakke en zoute water maken een hoek van 45 graden met de horizontaal (figuur 1). De drie watertypen hebben een constante dichtheid en worden gemodelleerd als niet-mengbare vloeistoffen (geen diffusie of dispersie; dit is natuurlijk niet reëel voor zeewater, maar hier wordt specifiek het kantelen van de brakke zone bestudeerd). Als alle randen van het modelgebied ondoorlatend zijn, zal de brakke zone kantelen naar de horizontale positie; figuur 2 laat de beginsituatie zien (donker grijs), de brakke zone na 2000 dagen (grijs), en na 12000 dagen (licht grijs). Wat nu wellicht onverwacht was, is dat gedurende de kantelende beweging de brakke zone in het midden dikker wordt dan aan de uiteinden, en de vraag werd gesteld of dit realistisch is. Daarbij komt nog dat de resultaten die op de SWIM gepresenteerd werden, afkomstig waren van een model waarin de weerstand tegen stroming in de verticale richting verwaarloosd werd (hier verder het Dupuitmodel genoemd). De geldigheid van de Dupuit-benadering voor dit geval wordt hier ook bestudeerd.

Om te bepalen hoe de brakke zone vervormt tijdens de kantelende beweging, worden de resultaten van drie computermodellen met elkaar vergeleken. De drie modellen, die verderop zullen worden beschreven, zijn gebaseerd op drie verschillende wiskundige formuleringen, maar beschrijven dezelfde fysische situatie. Als de drie modellen ongeveer dezelfde resultaten opleveren, dan lijkt het waarschijnlijk dat de resultaten wel zullen kloppen. Bijkomend voordeel is dat overeenstemming van resultaten het vertrouwen in de juistheid van de, onafhankelijk van elkaar ontwikkelde, computerprogramma's verhoogt. Vergelijking van de resultaten maakt het ook mogelijk om de invloed van de Dupuit-benadering te evalueren; de andere twee modellen maken deze benadering namelijk niet.

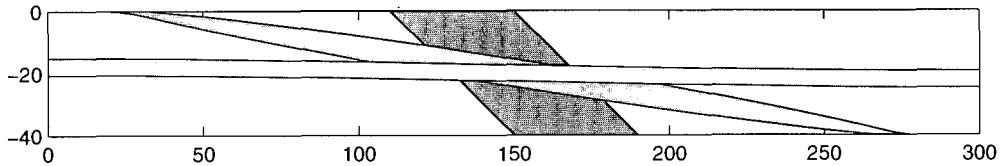
Mark Bakker is werkzaam bij Department of Biological and Agricultural Engineering, University of Georgia, Athens, GA 30602, USA, mbakker@engr.uga.edu.

Willem-Jan Plug is werkzaam bij TU Delft, Faculteit der Civiele Techniek en Geowetenschappen, Mijnbouwstraat 120, 2628 RX Delft, w.j.plug@citg.tudelft.nl.

Gualbert Oude Essink is werkzaam bij TNO-NITG, Princetonlaan 6, Postbus 80015, 3508 TA Utrecht, g.oudeessink@nitg.tno.nl en Vrije Universiteit, Faculteit der Aardwetenschappen, Vakgroep Hydrologie & Hydrogeologie, De Boelelaan 1085, 1081 HV Amsterdam, oudg@geo.vu.nl.



Figuur 1: Beginsituatie van een kantelende brakke zone.



Figuur 2: Een kantelende brakke zone. $t = 0$ (donker grijs), $t = 2000$ d (grijs), $t = 12000$ d (licht grijs).

Wat betreft de 'echte' vervorming van de kantelende brakke zone kan een Hele-Shaw model uitkomst bieden (voor een kleiner modelgebied natuurlijk); daar wordt hopelijk binnenkort vorderingen mee gemaakt.

Probleemdefinitie

Beschouw een verticale doorsnede van 300 bij 40 meter (figuur 1); de oorsprong van een x,y assenstelsel is gekozen in de linker bovenhoek. Als beginvoorwaarde loopt het grensvlak tussen het zoete en brakke water van $(x,y) = (150,0)$ tot $(x,y) = (190,-40)$, en het grensvlak tussen het brakke en zoute water van $(x,y) = (110,0)$ tot $(x,y) = (150,-40)$. De doorlatendheid is 2 m/d, en de effectieve porositeit 0,2. De meeste modellen vereisen ook de specificatie van een stijghoogte in één punt. Het hier beschreven probleem is onafhankelijk van deze keuze, zolang de stroming afgesloten blijft in de doorsnede. De dichtheden van het zoete, brakke en zoute water zijn respectievelijk 1000, 1012,5 en 1025 kg/m^3 .

De modellen

De volgende drie modellen worden gebruikt voor de simulatie van de kantelende brakke zone:

- 1 Een **Dupuitmodel**. In het Dupuitmodel wordt de weerstand tegen verticale stroming verwaarloosd. Het probleem is geformuleerd in drie afhankelijke variabelen: de stijghoogte aan de bovenkant van het model, de hoogte van het grensvlak tussen het zoete en brakke water, en de hoogte van het grensvlak tussen het brakke en zoute water; de onafhankelijke variabele is x . Continuïteitsvergelijkingen worden opgesteld voor de totale stroming in het model, voor stroming onder het eerste grensvlak, en voor stroming onder het tweede grensvlak. Deze vergelijkingen worden simultaan opgelost met een impliciet eindige differentie schema. Cellen zijn 5 meter breed en 40 meter hoog, zodat het totale aantal cellen 60 is. De tijdstap is 2 dagen voor de eerste 2000 dagen, en 10

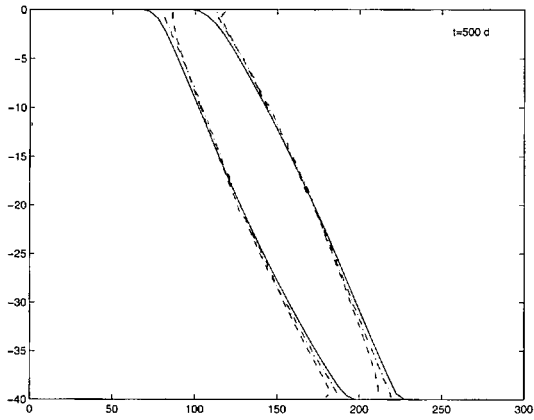
dagen daarna. De basisprincipes van het Dupuitmodel worden uiteengezet in Bakker (2000).

- 2 Een **Stroomfunctiemodel**. In dit model wordt de specifieke debietsvector (q_x, q_y) uitgedrukt in afgeleiden van de stroomfunctie Ψ als $(q_x, q_y) = (-\partial\Psi/\partial y, \partial\Psi/\partial x)$. De dichtheidsverschillen worden in rekening gebracht door een fictieve bronterm $Q = (\Delta\rho/\rho)\Delta h$. De dichte randen worden gemodelleerd door Ψ gelijk te stellen aan nul langs de gehele rand. De verplaatsing van de brakke zone wordt gemodelleerd door eerst de Poisson-vergelijking, in termen van de stroomfunctie en met als rechterlid de fictieve bronterm Q , op te lossen met een eindige differentie schema. Vervolgens worden snelheden uitgerekend om de verplaatsingen van het zout te berekenen. De horizontale celgrootte is 2 m, en de verticale 0,5 m, zodat het totale aantal cellen 3000 is. De tijdstap is 2 dagen. Voor details van de stroomfunctieformulering, zie Plug (2002a,b).
- 3 **MOCDENS3D**, een combinatie tussen MOC3D (Konikow e.a., 1996) en MODFLOW (McDonald en Harbaugh, 1988; Harbaugh en McDonald, 1996), met aanpassingen voor dichtheidsverschillen door Oude Essink (1998, 2000). De vergelijking voor dichtheidsafhankelijke grondwaterstroming wordt opgelost met behulp van de eindige-differentiemethode en stoftransport wordt gesimuleerd met de methode der karakteristieken. De rechthoekige cellen zijn 2 m breed en 0,4762 m hoog, zodat er in totaal 150 cellen in horizontale richting en 84 in verticale richting zijn. De tijdstap om de grondwaterstromingsvergelijking opnieuw op te lossen is gelijk aan 10 dagen. Het (advectieve) transport van zout wordt gemodelleerd met behulp van deeltjes ('particle tracking'), waarvan er initieel 16 in elke cel worden geplaatst. Er wordt geen hydrodynamische dispersie gesimuleerd. Desalniettemin is er sprake van een geringe numerieke dispersie (concentratie niet gelijk aan zoet, zout of brak grondwater), die echter beperkt blijft doordat het stoftransport gesimuleerd wordt met de methode der karakteristieken.

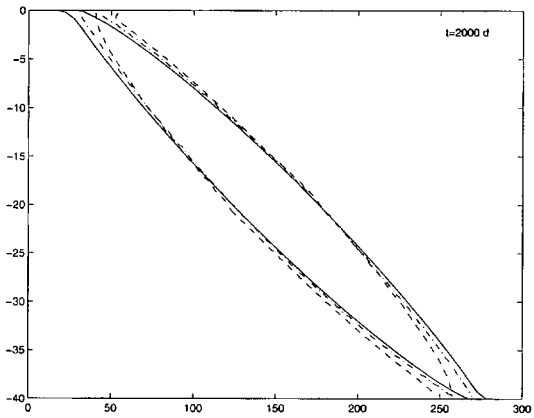
Resultaten

De positie van de brakke zone is vergeleken op drie tijdstippen: 500, 2000 en 12000 dagen. De resultaten staan in figuren 3a, b, en c. De verticale schaal is groter gekozen dan de horizontale schaal, zodat de resultaten iets makkelijker te vergelijken zijn. De getrokken lijnen zijn van het Dupuitmodel, de gestreepte lijnen van het stroomfunctiemodel, en de streepstippellijnen van MOCDENS3D. De resultaten van het Dupuitmodel zijn verkregen door het trekken van rechte lijnen tussen de hoogte van de grensvlakken in de middens van de cellen. In de andere twee modellen wordt een dichtheid in het midden van elke cel uitgerekend, en worden de twee scheidingsvlakken getekend door contourlijnen te trekken voor dichtheden van 1006,25 (25% zout) en 1018,75 kg/m³ (75% zout).

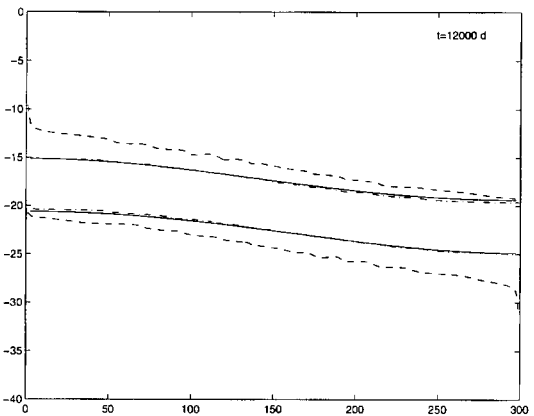
Het algemene karakter van de vervorming van de brakke zone is hetzelfde in de drie modellen: tijdens de kanteling is de brakke zone dikker in het midden en dunner aan de uiteinden. Het is dan ook aannemelijk dat dit resultaat inderdaad klopt. Op 500 dagen en 2000 dagen loopt het Dupuitmodel iets vooruit op de andere twee modellen, maar op 12000 dagen is het verschil tussen het Dupuitmodel en MOCDENS3D erg klein. Om hopelijk iets meer inzicht te geven in het stromingsprobleem is in figuur 4 het snelheidsveld te zien voor $t = 500$ d. Dit plaatje is gemaakt met MOCDENS3D; de andere twee modellen geven een soortgelijk resultaat. Het snelheidsveld geeft inzicht in de roterende beweging van het grondwater; vooral het stagnatiepunt in het midden van het model is fraai te zien.



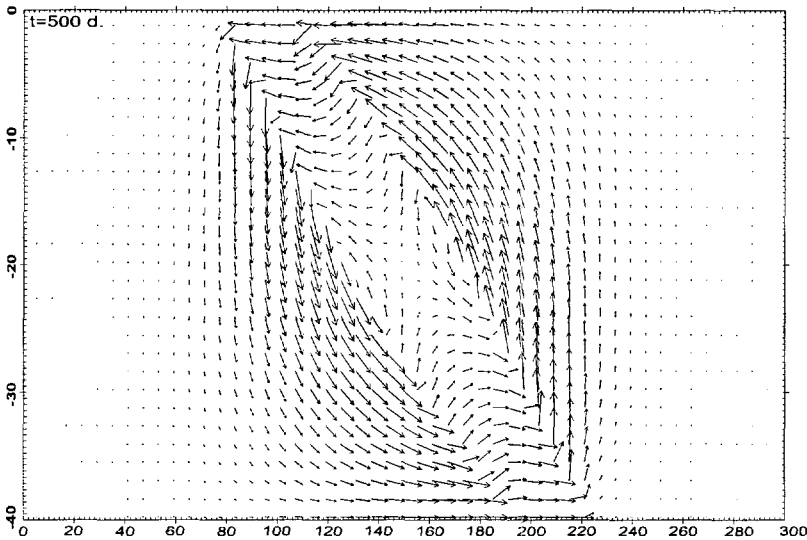
Figuur 3a: Resultaten $t = 500$ d. Dupuit (getrokken), Stroomfunctie (gestreept), MOCDENS3D (streep-stippel).



Figuur 3b: Resultaten $t = 2000$ d. Dupuit (getrokken), Stroomfunctie (gestreept), MOCDENS3D (streep-stippel).



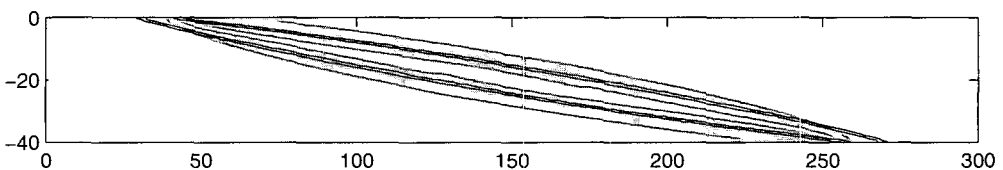
Figuur 3c: Resultaten $t = 12000$ d. Dupuit (getrokken), Stroomfunctie (gestreept), MOCDENS3D (streep-stippel).



Figuur 4: Snelheidsveld $t = 500$ d, berekend met MOCDENS3D.

Zowel het stroomfunctiemodel als MOCDENS3D hebben last van een beetje numerieke dispersie (maar MOCDENS3D kan dan ook wel met echte dispersie rekenen, terwijl de andere twee modellen dat (nog) niet kunnen). Het tekenen van de contourlijnen voor 25% en 75% zout was dan ook enigszins arbitrair. Ter vergelijking is de overgangszone van 5% zout naar 45% zout, en van 55% zout naar 95% zout weergegeven in figuur 5. De numerieke dispersie van MOCDENS3D is klein (de getrokken zwarte lijnen), van het stroomfunctiemodel iets groter (de grijze zone). Het Dupuitmodel en het stroomfunctie model voldoen exact aan de massabalans (binnen de nauwkeurigheid van de computer). MOCDENS3D maakt een heel klein foutje, olopend tot 0,04% op $t = 12000$ dagen.

De voor- en nadelen van de drie programma's worden hier niet uitgebreid besproken, omdat het oordeel nogal afhankelijk is van het gekozen probleem (drie niet-mengbare vloeistoffen). Ze geven alle drie ongeveer hetzelfde resultaat en daar was het om te doen. Het zou dus geconcludeerd kunnen worden dat tijdens de kanteling een brakke zone inderdaad dikker wordt in het midden en dunner aan de uiteinden. Tevens blijkt dat de Dupuit-benadering weinig effect heeft op de kanteling van de brakke zone, zelfs voor dit geval waarbij de grensvlakken beginnen onder een hoek van 45° met de horizontaal. De Dupuit-oplossing loopt iets voor op de andere oplossingen voor $t = 500$ en $t = 2000$ dagen; dit verschil is klein, maar zou toch het gevolg van de benadering kunnen zijn. Aan de andere kant lijkt het ook zo dat hoe meer numerieke dispersie er is, hoe langzamer de brakke zone kantelt; hoewel MOCDENS3D het Dupuitmodel op 12000 dagen toch weer ingehaald heeft.



Figuur 5: Numerieke dispersie $t=2000$ d. Stroomfunctie (grijs gebied), MOCDENS3D (zwarte lijnen).

Nawoord

Mocht u ook een grondwater model hebben dat met dichtheidsverschillen kan rekenen, dan wordt u hierbij uitgenodigd om dit probleem ook eens door te rekenen. Uw resultaten kunt u e-mailen naar mbakker@engr.uga.edu. Momenteel wordt het probleem ook doorgerekend met SUTRA en SEAWAT. De resultaten zullen bijgehouden worden op www.engr.uga.edu/~mbakker/brackish.html.

Literatuur

- Bakker, M.** (2000) Simple groundwater flow models for seawater intrusion; in: *Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting*, Wolin Island, Poland, June 2000.
- Harbaugh, A.W. en M.G. McDonald** (1996) User's documentation for the U.S. Geological Survey modular finite-difference ground-water flow model; U.S.G.S. Open-File Report 96-485, 56 pag.
- Konikow, L.F., D.J. Goode en G.Z. Hornberger** (1996) A three-dimensional method-of-characteristics solute-transport model (MOC3D); U.S.G.S. Water-Resources Investigations Report 96-4267, 87 pag.
- McDonald, M.G. en A.W. Harbaugh** (1988) A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model; U.S.G.S. Techniques of Water-Resources Investigations, Book 6, Chapter A1, 586 pag.
- Oude Essink, G.H.P.** (1998) Simuleren van 3D dichtheidsafhankelijke grondwaterstroming: MOCDENS3D; in: *Stromingen*, jrg 4, nr 1, pag 5–23.
- Oude Essink, G.H.P.** (2000) Zoutwaterintrusie in het grondwatersysteem van de kop van Noord-Holland, een toepassing van de drie-dimensionale computercode MOCDENS3D; in: *Stromingen*, jrg 6, nr 3, pag 9–21.
- Plug, W.J.** (2002a) Numeriek model ter beschrijving van dichtheidsafhankelijke stroming in watervoerende pakketten, afstudeerverslag TU Delft, 2002.
- Plug, W.J.** (2002b, in druk) Investigation for an optimal sustainable solution for the ground water system in the coastal zone of The Netherlands; in: *Proceedings 17th Salt Water Meeting*, mei 2002, Delft.