Hatsi-kD

De breedte van een waterloop

Toen ik in Delft studeerde, al weer heel wat jaartjes geleden, leerde ik dat er twee scholen waren die het gedrag van alluviale rivieren beschreven. De Delftse school, die uiteraard de beste was, en de school van de regiemtheorie. De regiemtheorie was empirisch van karakter en kwam tot bloei in het begin van de vorige eeuw. De grondleggers zijn Kennedy (1894), Lindley (1919) en Lacey (1930), en hun werkterrein was het Indus-stroomgebied in toenmalig Brits Indië. Deze mensen stonden voor de moeilijke taak om irrigatiekanalen te ontwerpen in alluviaal materiaal. Eerdere proeven hadden aangetoond dat het erg moeilijk was om dit soort kanalen stabiel te krijgen. Ze gingen meanderen, eroderen, aanzanden of verlegden spontaan hun loop. Deze louter empirische benadering beoogde waar te nemen wat in natuurlijke waterlopen, die min of meer in morfologisch evenwicht waren, de verhouding was tussen een veelheid aan stroomparameters, zoals: de afvoer, de stroomsnelheid, de waterdiepte, het dwarsprofiel, de breedte, het verhang, het sedimentgehalte van het water, de grootte van het bodemmateriaal, etc. De onderliggende gedachte was dat als een waterloop 'in regiem' is, wat wil zeggen dat er een zeker morfologisch evenwicht is, dat er dan bepaalde empirische betrekkingen tussen deze parameters gevonden kunnen worden. De betrekkingen die gevonden werden waren meestal machtsfuncties.

Zes vergelijkingen

De Delftse school baseerde zich louter op de behoudswetten van massa en beweging ($F = ma$). Althans dat was de bedoeling. Voor water resulteerde dat in de St. Venant-vergelijkingen; en voor het sediment in een continuïteitsvergelijking en een transportvergelijking (bijv. de formule van Engelund-Hansen). Dit stelsel van vier vergelijkingen kan men schrijven als:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha' \frac{\partial (Q^2/A)}{\partial x} + gA\frac{\partial h}{\partial x} + gA\frac{\partial z_b}{\partial x} + gA\frac{U|U|}{C^2 h} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

$$B\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

$$Q_s = 0.05B\frac{U^5}{D_{50}\Delta^2 C^3 \sqrt{g}} \qquad (4)$$

waar:

Q	=	$Q(x,t)$, de afvoer in m^3/s
α'	=	een vormfactor die corrigeert voor de onregelmatigheid van het dwarsprofiel
A	=	$A(x,t)$, de dwarsdoorsnede in m^2
h	=	$h(x,t)$ de gemiddelde waterdiepte in m
z_b	=	$z_b(x,t)$ de bodemhoogte in m
U	=	$U(x,t)$ de stroomsnelheid gemiddeld over het dwarsprofiel in m/s
C	=	$C(x)$ de coefficient van Chezy in $m^{0.5}/s$
B	=	$B(x,t)$ de breedte aan het oppervlak in m
Q_s	=	$Q_s(x,t)$ het sedimenttransport in m^3/s

Δ	=	het relatieve dichtheidsverschil van sediment en water ((2600 – 1000) / 1000 = 1,6)
D_{50}	=	de mediaan van de diameter van het bodemsediment in m

Hierbij komen nog twee geometrische vergelijkingen die voortvloeien uit de definitie van het dwarsprofiel en de afvoer:

$$A = hB \qquad (5)$$

$$Q = UA \qquad (6)$$

In totaal zijn dit zes vergelijkingen. Als we deze vergelijkingen echter goed bekijken, zullen we zien dat er acht afhankelijke parameters zijn: U, h, z_b, B, A, C, Q, en Q_s. Dit zijn er twee te veel. De Delftse (fysische) methode geeft dus geen oplossing voor de vraag hoe een kanaal er uit zal zien voor een gegeven afvoerverloop. Daarnaast moeten we eerlijkheidshalve toegeven dat ook de formule van Engelund-Hansen voor een belangrijk deel empirisch is.

Het meeste onderzoek heeft zich erop gericht om een goede betrekking voor C te vinden. In laboratoriumgoten lukte dat wel, maar in natuurlijk meanderende waterlopen was dat moeilijker en werd zo'n formule al snel zuiver empirisch. Maar zelfs dan komen we nog een vergelijking te kort: we zoeken een 'zevende vergelijking'. Sommigen denken dat we energiebalansen of entropiebeschouwingen nodig hebben om de ontbrekende vergelijking af te leiden. Ik denk dat ook, maar we zijn nog ver verwijderd van een bevredigend resultaat.

Een andere weg is om toch eens naar de regiemvergelijkingen te kijken en te onderzoeken of er niet een bruikbare vergelijking tussen zit die voor de Delftse methode als zevende vergelijking kan dienen. En die vergelijking is er inderdaad. Van de vier vergelijkingen die Lacey heeft afgeleid, blijken de eerste drie inwisselbaar te zijn voor achtereenvolgens: de Chezy-vergelijking, een zandtransportvergelijking en een geometrische betrekking. Maar de vierde vergelijking van Lacey is iets volslagen anders. Het is een betrekking voor de breedte van de rivier bij een "bankfull" afvoer Q_b, die bruikbaar blijkt te zijn als zevende vergelijking. Bankfull betekent dat de rivier op het punt staat buiten zijn natuurlijke oevers te treden. Deze toevoeging is relevant omdat de formule voor lagere afvoeren niet opgaat. De formule is verduiveld simpel:

$$P \approx B = k_s\ Q_b^{\,0.5} \qquad (7)$$

waarin P de natte perimeter is, die in een alluviale rivier ongeveer gelijk is aan de breedte aan het wateroppervlak.

Vuistregel 66

De breedte van een rivier die op het punt staat buiten zijn oevers te treden, is evenredig met de wortel van de afvoer.

Deze vergelijking heeft Lacey in 1930 gepubliceerd. Hij is sindsdien door vele onderzoekers verfijnd, maar nauwelijks herzien. Lacey stelde dat k_s=4.8; latere onderzoekers maakten k_s een functie van het bodemmateriaal. Wat echter door al zijn opvolgers werd gehandhaafd was dat de breedte evenredig is met de wortel van de afvoer. Uiteraard is de coëfficiënt k_s niet dimensieloos. In het benedenstaande wordt een betrekking voor k_s afgeleid.

Uit een laterale evenwichtsbeschouwing van zandkorrels in een dwarsprofiel volgt de formule van Lane (1955):

$$\frac{h(y)}{h_m} = \cos\left(\frac{\tan\varphi}{h_m}y\right) \qquad (8)$$

waar $h(y)$ de diepte is als functie van de laterale ordinaat y; h_m is de maximale bodemdiepte in het centrum van de stroom, en $\tan\varphi$ is het natuurlijk talud van het sediment in stilstaand water (wat een functie is van het sediment). Uit integratie volgt:

$$A = 2h_m^2 / \tan\varphi \qquad (9)$$

en:

$$B = \pi h_m / \tan\varphi \qquad (10)$$

Dit zijn twee eenvoudige formules die men terugvindt in standaard tekstboeken zoals Raudkivi (1967,1976). Wat echter niemand gedaan heeft is de voor de hand liggende substitutie van (9) en (10) in (5):

$$h = \frac{A}{B} = \frac{2h_m^2}{\tan\varphi}\frac{\tan\varphi}{\pi h_m} = \frac{2h_m}{\pi} \qquad (11)$$

Door eliminatie van h_m uit (11) and (10) volgt dat de diepte en de breedte in vaste verhouding tot elkaar staan:

$$h = \frac{2\tan\varphi}{\pi^2} B \qquad (12)$$

Vuistregel 67

In een rivierbed is de breedte evenredig met de gemiddelde diepte.

Lacey's vergelijking volgt uit combinatie van (12) met (6):

$$Q_b = \frac{2\tan\varphi}{\pi^2} B^2 U_b \qquad (13)$$

of:

$$B = \sqrt{\frac{\pi^2}{2U_b \tan\varphi}}\sqrt{Q}_b \qquad (14)$$

Dit is de vergelijking van Lacey met:

$$k_s = \sqrt{\frac{\pi^2}{2U_b \tan\varphi}} \qquad (15)$$

In een eerdere Hatsi-KD heb ik al eens uiteengezet dat een natuurlijke waterloop regelmatig buiten zijn oevers moet treden om op lange termijn het sediment te kunnen afvoeren. Omdat het bodemverloop van een alluviale rivier convex is, neemt de stroomsnelheid af naarmate we verder benedenstrooms gaan. De sedimenttransport-capaciteit neemt (zie vergelijking 4) zelfs sterker af. Dit heeft aanslibbing van de bodem tot gevolg. Voorwaarde voor een alluviale rivier om in zijn eigen bed te blijven is dat hij regelmatig buiten zijn oevers treedt zodat hij het overtollige sediment kan afzetten. De typische stroomsnelheid die daarbij hoort is U_b, en bij deze snelheid hoort uiteraard een bepaalde sedimentdiameter D_{50}, de maat van het sediment dat nog bij een snelheid U_b over de oevers kan worden getild. We zien dan ook dat het materiaal van de natuurlijke oeverwallen van bovenstrooms naar benedenstrooms steeds fijner wordt en dat ook de stroomsnelheid bij een bankfull-afvoer afneemt. In een benedenrivier ligt die snelheid in de orde van 1 m/s.

De afmeting van het op de oevers afgezette sediment is dus louter een functie van U_b, maar ook het omgekeerde is waar. De snelheid bij een bankfull-afvoer is louter een functie van het sediment. De coëfficiënt van Lacey k_s is dus niet afhankelijk van de bankfull-afvoer of van de breedte. Dientengevolge is Lacey's vergelijking aangetoond.

Wel moeten we er goed op letten dat de conditie voor Lacey's vergelijking opgaat. Hij geldt alleen voor bankfull-afvoer onder alluviale omstandigheden. Bovendien kan de breedte plaatselijk sterk variëren. Veel metingen zijn gedaan door mensen bij lagere afvoeren en dan gaat de betrekking niet op. Tenslotte moet Lacey's formule niet gebruikt worden als een algemene fysische wet: het is een vuistregel die dicht komt bij de natte vinger: me dunkt een echte Hatsi-kD waardig.

Huub Savenije
TU-Delft
hsa@ihe.nl

Literatuur

Kennedy, R.G. (1894) The prevention of silting in irrigation canals; in: *Minutes of the Proc., Inst. of Civ. Engrs.*, London, **119**, pag 281–290.

Lacey, G. (1930) Stable channels in alluvium; in: *Minutes of the Proc., Inst. of Civ. Engnrs.*, London, **229**, pag 259–292.

Lane, E.W. (1955) Design of stable channels; in: *Transactions*, ASCE, **120**, pag 1234–1260.

Lindley, E.S. (1919) Regime channels; in: *Proc. Punjab Engrg. Cong.*, **7**, pag 63–74.

Raudkivi, A.J. (1967, 1976) *Loose boundary hydraulics*; 2nd edition, Pergamon Press, Oxford.